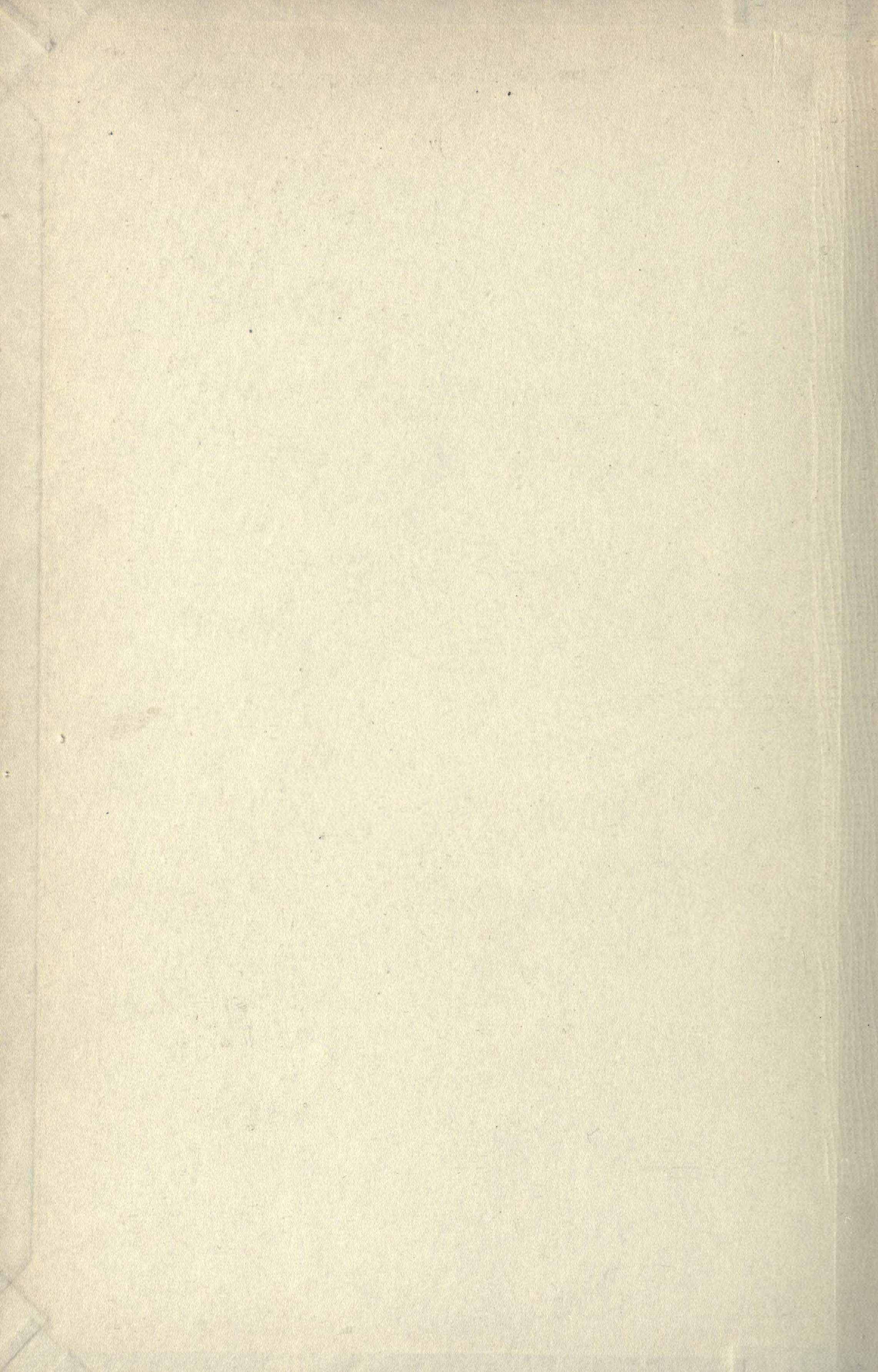
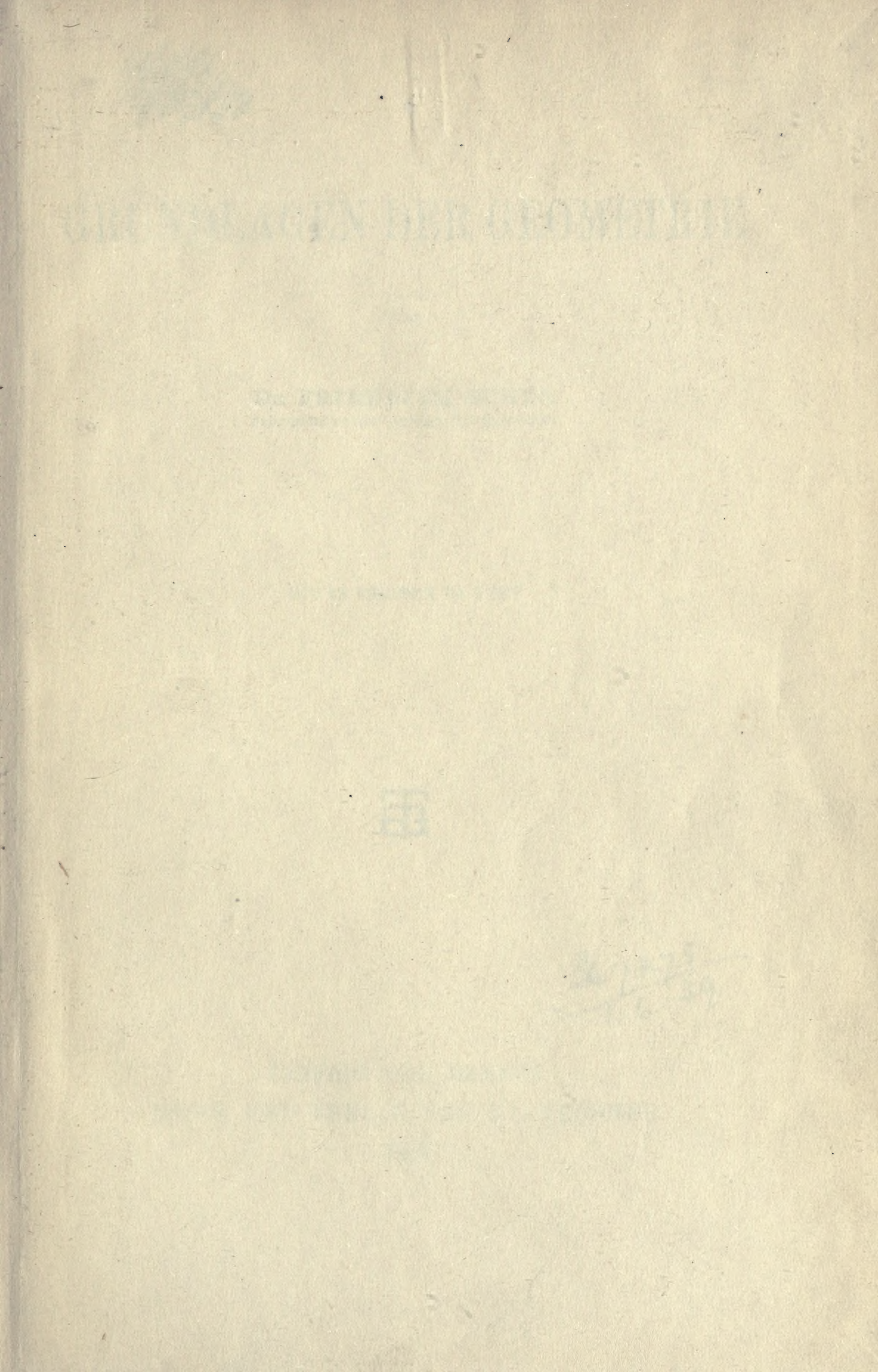
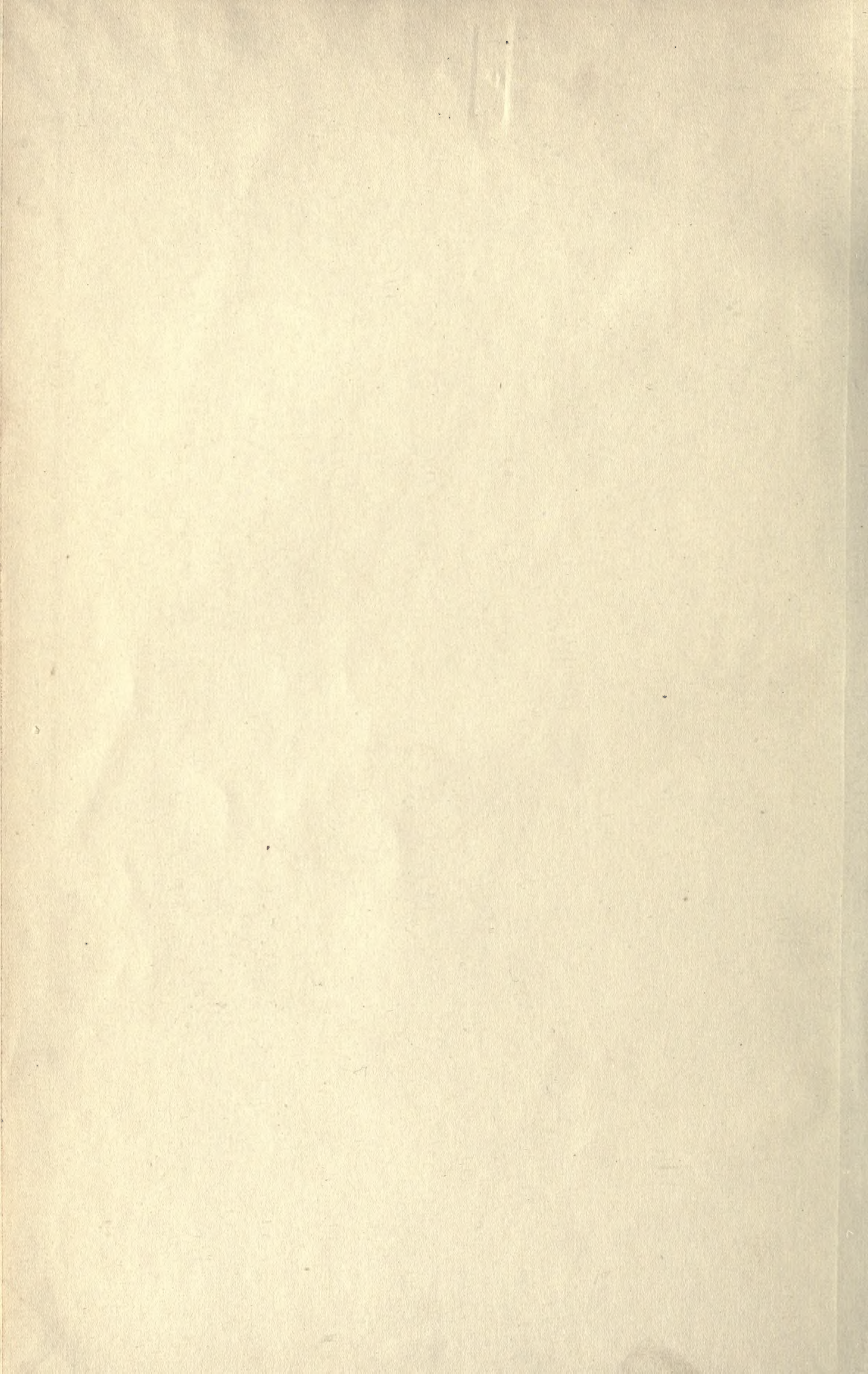
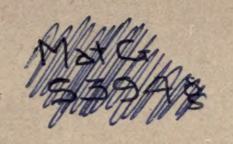










GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. FRIEDRICH SCHUR
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT STRASSBURG

MIT 63 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1909

Vorwort.

Versteht man unter den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie die Frage nach dem logischen Zusammenhange von geometrischen Axiomen oder nach der Beweisbarkeit einzelner aus den übrigen, so zeigen die Jahrhunderte alten Beweisversuche des Parallelenaxioms, wie alt das Interesse für diese Frage ist (vgl. die auf S. 103 angef. Urkundensammlung von Engel und Stäckel). Wenn auch dies besondere Problem durch die Aufstellung einer sogenannten nichteuklidischen Geometrie von Joh. Bolyai und N. Lobatschefskij zu einem vorläufigen Abschlusse gebracht wurde, so hatte die doch von mancher Seite erfolgte Ablehnung des dadurch gewonnenen Ergebnisses, daß das Parallelenaxiom unbeweisbar sei, darin einen Schein von Berechtigung, daß es noch an einem Systeme von geometrischen Axiomen fehlte, das alle diejenigen Tatsachen der Anschauung vollständig zum Ausdruck bringt, welche die Grundlage der rein logischen Untersuchungen der Geometrie bilden. Denn ohne Zweifel wurden nicht nur von Euklid, sondern auch von Lobatschefskij in dessen Anfangsgründen der Geometrie (übers. von Engel, Leipzig, 1898) stillschweigend viele Voraussetzungen eingeführt, die in den anfänglich vorausgeschickten Axiomen nicht enthalten waren. Durch Hinzufügung irgend einer solchen Voraussetzung, die freilich auch sonst für die Geometrie notwendig sein mußte, könnte doch noch ein Beweis des Parallelenaxioms möglich sein. Umgekehrt sind gerade in den vielen Beweisversuchen des Parallelenaxioms an irgend einer Stelle stillschweigend Voraussetzungen eingeführt worden, die jenem Axiome gleichwertig sind.

Solchen Einwänden wurde schon durch Riemann und Helmholtz Boden entzogen, insofern diese Forscher die der Geometrie zugrunde liegenden Voraussetzungen wenigstens unter der Annahme, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, in der jedem Punkte ein Zahlentripel umgekehrt eindeutig zugeordnet ist, zum vollständigen analytischen Ausdruck brachten (vgl. hierzu Lie, Theorie der Trans-

formationsgruppen, III. Abschnitt, S. 393ff., Leipzig, 1893). Auch diese Untersuchungen ergaben das Resultat, daß das Parallelenaxiom unbeweisbar sei, insofern sie die Widerspruchslosigkeit der nichteuklidischen Geometrien unwiderleglich nachwiesen, und bildeten den Ausgangspunkt für andre wichtige Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, die auf Grund der neuen Erkenntnis nach denjenigen Sätzen der Geometrie forschten, welche vom Parallelenaxiom unabhängig sind. Wir haben hier besonders F. Klein zu nennen, der auf Grund der Geometrie der Lage von Staudt und der analytischen Entwicklungen von Cayley zu dem Resultate kam, daß die projektive Geometrie bei geeigneter Formulierung nur aus solchen Sätzen bestünde. F. Klein stellte demgemäß auch die Forderung auf, der projektiven Geometrie eine vom Parallelenaxiom unabhängige Begründung zu geben, und bezeichnete es als ein wesentliches Erfordernis einer solchen Begründung, daß die Axiome nur für einen endlichen Bereich aufzustellen und dieser durch Adjunktion idealer oder uneigentlicher Elemente ebenso zu erweitern sei, wie dies in der gewöhnlichen Darstellung durch Hinzufügung der unendlich fernen Elemente geschieht.

Die strenge Durchführung dieser Ideen hat Pasch in seiner Neueren Geometrie (Leipzig, 1882) gegeben, aber wir verdanken ihm mehr. Jene Annahme von Riemann und Helmholtz, daß der Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit sei, war doch so wenig geometrisch, daß sie schon deshalb als Grundlage der Geometrie nicht befriedigen konnte (vgl. im übrigen die auf S. 163 angef. Schrift von F. Klein). So unternahm es denn Pasch zum ersten Male, jene oben erwähnte Lücke auszufüllen, nämlich ein vollständiges System von Tatsachen der Anschauung aufzustellen, aus denen die Geometrie rein logisch entwickelt werden kann. Hiermit eröffnete Pasch eine neue Ära in den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie, da sich nunmehr naturgemäß die Frage, die man bisher ausschließlich für das Parallelenaxiom gestellt hatte, ob es nämlich unabhängig von den übrigen sei, auch für andre Axiome einstellen mußte. Solche Untersuchungen wurden zuerst systematisch von Veronese (Fondamenti di Geometria, Padova, 1891) und von Peano (Fondamenti di Geometria, Rivista di Matematica, IV, 1894) vorgenommen. Während die Schrift von Peano gewissermaßen als eine Revision und Umarbeitung des von Pasch aufgestellten Axiomensystems bezeichnet werden kann, wobei die Benutzung einer Logik-Kalküls den rein logischen Charakter dieser geometrischen Entwicklungen zum unmittel-

baren Ausdruck bringen sollte, stellte Veronese die Geometrie auf ganz eigenartige Grundlagen und unterzog besonders das Stetigkeitsaxiom oder das sogenannte Archimedische Postulat einer gründlichen Untersuchung. Sie führte zu dem neuen Ergebnisse, daß ein großer Teil der geometrischen Lehrsätze auch von diesem Postulate unabhängig sei.

Indessen konnte sich auch dies Resultat zunächst keiner unbedingten Anerkennung erfreuen, insofern das Größensystem, auf das Veronese seinen Beweis stützte, von ihm in so allgemeiner und schwer verständlicher Form dargelegt wurde, daß sich Mißverständnisse leicht einstellen konnten. Da gelang es einerseits den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie unabhängig von jedem Stetigkeitsaxiome zu beweisen (vgl. die Anm. auf S. 50), und konnte andrerseits Hilbert in seiner Festschrift (Grundlagen der Geometrie, Göttingen, 1899) ein ganz elementares System von Größen aufstellen, durch das sich ein jeder von der Richtigkeit des Veroneseschen Resultats überzeugen konnte. Diese Schrift, deren sonstige Bedeutung in unserm Buche sehr oft zum Ausdruck kommen wird, gab den Anstoß zu einer Reihe wichtiger Untersuchungen über den Zusammenhang der Axiome und die Abhängigkeit der geometrischen Sätze von ihnen. Wir können diese Untersuchungen an dieser Stelle nicht einzeln anführen. Jedenfalls wird durch ihre Ergebnisse der Versuch gerechtfertigt, gewissermaßen eine erneute Bearbeitung der Neueren Geometrie von Pasch zu veranstalten. In diesem Sinne bitten wir das vorliegende Büchlein aufzunehmen.

Bei der Wahl der Axiome oder Postulate haben wir uns im wesentlichen an Peano angeschlossen unter Benutzung derjenigen Vereinfachungen, welche seither erzielt werden konnten. Das Parallelenaxiom wird hierbei zunächst vollkommen ausgeschaltet, ebenso wie das Archimedische Postulat. In den ersten beiden Paragraphen leiten wir zunächst diejenigen Folgerungen ab, welche sich aus den projektiven Postulaten allein ergeben, und gelangen in § 3 auf Grund der Postulate der Bewegung zu dem Beweise des Pascalschen Satzes. Wir benutzen hierbei auch räumliche Postulate, obgleich nach Hjelmslev dasselbe Resultat auch in der Ebene allein erzielt werden kann. Diese schönen, aber schwierigen Untersuchungen bringen wir erst in § 7 und haben dort den Grund hierfür angegeben. Der 4. Paragraph ist der Begründung der projektiven Geometrie und dem Rechnen mit projektiven Strecken gewidmet, wobei wir uns bemüht haben, den letzteren Entwickelungen eine solche Gestalt zu

geben, daß die Analogie mit dem gewöhnlichen Rechnen überall hervortritt und Kunstgriffe möglichst vermieden werden. Auf dieser Grundlage konnten in § 5 die metrischen Grundformeln der nichteuklidischen oder vielmehr allgemeinen, d. h. vom Parallelenaxiom unabhängigen Geometrie entwickelt werden. Auf diese Weise ergab sich eine klare Übersicht über diejenigen Sätze, welche vom Parallelenaxiom unabhängig sind. Auch die Fundamentalkonstruktionen wurden so durchgeführt, daß sie in jeder Geometrie gelten.

In § 6 ist dann die Frage der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den übrigen Postulaten mit aller Ausführlichkeit untersucht worden. Hierzu wurde in bekannter Weise auf arithmetischer Grundlage eine nichteuklidische Geometrie konstruiert; als abweichend von der gewöhnlichen Darstellung möchten wir nur den vollständigen Beweis für die Geltung aller übrigen Postulate in dieser Geometrie hervorheben. Ein solcher Beweis bietet für die projektiven Postulate nicht die geringsten Schwierigkeiten und wird, was die Postulate der Bewegung betrifft, gewöhnlich damit als erledigt betrachtet, daß man die Bewegungen als diejenigen Kollineationen definiert, welche ein gewisses Polarsystem in sich transformieren. Da indessen hierdurch die Einsicht in die Gültigkeit der Postulate keineswegs so unmittelbar ist und die bezüglichen analytischen Entwickelungen sich für den Raum sehr kompliziert gestalten, so haben wir die Bewegungen durch die Aufeinanderfolge besonders einfacher Kollineationen, die wir Umwendungen nennen, definiert und konnten so den Beweis der Gültigkeit der Postulate in aller Vollständigkeit und Durchsichtigkeit liefern. Eine solche Durchführung des Unabhängigkeitsbeweises schien uns in der Tat nicht überflüssig, da nur hierdurch alle Zweifel an der Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms beseitigt werden können.

Der letzte Paragraph ist dem Archimedischen Postulate gewidmet und soll seine große Tragweite beleuchten. Wir weisen in dieser Beziehung besonders auf die Beweisbarkeit der Postulate von der Umkehrbarkeit der Strecke und des Winkels hin und auf die Sätze über das Vorkommen uneigentlicher Schnittpunkte von Geraden einer Ebene. Auf den hierauf bezüglichen Unterschied zwischen der sogenannten elliptischen und der sphärischen Geometrie, der bekanntlich darin besteht, daß in der einen je zwei Geraden derselben Ebene je einen, in der anderen aber je zwei Punkte gemein haben, sind wir nicht eingegangen, weil dieser Unterschied den Zusammenhang der Postulate, deren Gültigkeit nur für einen beschränkten

Bereich angenommen wurde (vgl. S. 122), nicht betrifft. Aus demselben Grunde haben wir alles ausgeschieden, was hiermit nur lose zusammenhängt, so z. B. die Clifford-Kleinschen Raumformen (vgl. Killing, Grundlagen der Geometrie, IV. Abschn.), Flächen- und Rauminhalt sowie mehrdimensionale Geometrie.

Obwohl wir uns bemüht haben, aus den Postulaten alle überflüssigen Elemente möglichst auszuscheiden, so erheben wir nicht den Anspruch, daß die von uns benutzten Postulate wirklich ganz voneinander unabhängig seien. Ob es je gelingen werde, ein solches System aufzustellen und seine Unabhängigkeit zu beweisen, erscheint uns schon deshalb sehr zweifelhaft, weil die meisten neuen Postulate erst auf Grund früherer einen Sinn erhalten, die Frage also, ob jedes einzelne Postulat von allen übrigen unabhängig sei, gar nicht gestellt werden kann. Wir müssen uns daher bescheiden, eine solche Untersuchung für größere Gruppen von Postulaten durchgeführt zu haben.

Bei den Literaturangaben haben wir uns auf das Wesentliche beschränkt und möchten im übrigen auf den Artikel „Prinzipien der Geometrie" von Enriques in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, S. 1 ff. verweisen.

Während des Druckes hatte ich mich der Unterstützung meines Freundes und Kollegen Stäckel zu erfreuen. Die Ratschläge, die er mir beim Lesen der Korrekturen erteilt hat, waren mir sehr wertvoll, und ich spreche ihm auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank dafür aus.

Auch der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner danke ich für die Freundlichkeit, mit der sie auf meine Wünsche eingegangen ist.

Straßburg, im Juni 1909.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Das Bedürfnis nach strengerer Begründung der Geometrie, das seit einigen Jahrzehnten lebendig geworden ist und inzwischen eine so glänzende Betätigung gefunden hat, könnte denjenigen befremden, der sich mathematische Deduktion nicht anders als vollkommen streng vorzustellen gewöhnt ist. Worin kann überhaupt der Unterschied in der Strenge der neuesten und der älteren Mathematik bestehen? Dieser Unterschied kann natürlich nicht in dem Prozesse der Deduktion selbst liegen; denn dieser verläuft überall nach dem Satze der Identität und demjenigen vom ausgeschlossenen Dritten. Ein Mangel an Strenge wird also entweder zu suchen sein in der Unklarheit der Prämissen, die eine Identität annehmen lassen, wo eine solche nicht vorhanden ist oder wenigstens erst bewiesen werden muß, oder in der Unvollständigkeit der auszuschließenden Möglichkeiten. Eine solche allerdings ziemlich plumpe und falsche Annahme einer Identität war es z. B., wenn Thibaut[1]) in seinem nicht eben rühmlich bekannten, aber doch vielfach angenommenen Beweise des Parallelensatzes stillschweigend voraussetzte, es sei für die Endrichtung eines beweglichen Strahles gleichgültig, ob die Drehungen, denen er der Reihe nach unterworfen wird, um denselben oder um verschiedene Punkte erfolgen. Aber eine solche nicht ohne weiteres erlaubte Annahme einer Identität war es auch, wenn Legendre die rationalen und irrationalen Zahlen ohne genauere Untersuchung geometrischen Strecken gleich setzte. In diesem Punkte verfuhr Euklid mit größerer Strenge. Was aber Fehlschlüsse der zweiten Art betrifft, so bietet die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert eine Fülle von Beispielen. Wer hätte ehedem von einer stetigen Funktion geglaubt, daß sie keine Differentialquotienten besitze, daß sie nicht in eine Taylorsche Reihe entwickelt werden könne, selbst wenn alle ihre höheren Differentialquotienten endlich und stetig sind? Daß aus der Unbegrenztheit einer Linie nicht notwendig die Unendlichkeit ihrer Länge folge, daß es auch soge-

1) Vgl. Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Paderborn, 1893, I. Bd., S. 7 ff.

nannte einseitige Flächen gebe, wurde früher ganz übersehen. Selbst in der Mathematik spielt eben viel mehr, als gemeinhin angenommen wird, die Induktion aus dem bis dahin bekannten Erfahrungsmaterial eine Rolle.

Wenn nun auch ein solches Übersehen von Möglichkeiten nicht ohne Einfluß auf die Strenge der Begründung der Geometrie gewesen ist, so hat sich doch die Unklarheit der Prämissen von jeher in viel höherem Grade fühlbar gemacht. Selbst Euklid, dessen Lehrgebäude trotz seines ehrwürdigen Alters bis vor wenigen Jahrzehnten als das festeste gelten konnte, führt doch nachträglich und stillschweigend eine Menge von Voraussetzungen ein, die die Schärfe seiner Schlüsse bisweilen vermindern. Wir werden demgemäß die Aufgabe einer wissenschaftlichen Darstellung der Grundlagen der Geometrie folgendermaßen formulieren können:

Ein einfaches und vollständiges System von einander möglichst unabhängiger Tatsachen der Anschauung oder Axiome aufzustellen, aus denen die Geometrie auf rein logischem Wege hergeleitet werden kann.

Warum wir nicht den Anspruch erheben können, alle überflüssigen Axiome oder überflüssige Teile solcher wirklich auszuschließen, darüber haben wir uns schon im Vorworte geäußert.

Bei der Auswahl derjenigen Tatsachen der Anschauung, denen unser System von Axiomen Ausdruck verleihen soll, kann zwar eine gewisse Willkür nicht vermieden werden, immerhin aber wird man sich an die folgenden Regeln halten müssen. Damit unsere Arbeit überhaupt den Namen Geometrie verdiene, scheint es uns notwendig, daß diese Axiome oder Postulate das Resultat der einfachsten und elementarsten Beobachtungen der natürlichen Figuren ausdrücken, aus deren Abstraktion sie entstanden sind. Es dürfte also z. B. nicht erlaubt sein, ein Axiom an die Spitze zu stellen, das aussagt, der Raum sei eine Zahlenmannigfaltigkeit, in der jeder Punkt durch drei Koordinaten bestimmt ist. Ebensowenig wird man in einer projektiven Geometrie, in der die metrische enthalten sein soll, ohne weiteres postulieren dürfen, daß je zwei Geraden einer Ebene einen Punkt gemein haben. Auch dasjenige Axiom, welches die Stetigkeit der geometrischen Gebilde ausdrückt, wird, obwohl dieser Begriff seiner Natur gemäß unmittelbarer Anschauung nicht zugänglich ist, doch so zu fassen sein, daß die darin ausgesprochenen einzelnen Tatsachen anschauungsgemäß sind.

Ferner müssen wir uns hüten, solche Erklärungen an den Anfang der Geometrie zu stellen, welche wirklichen Inhalt erst bei einiger

Entwicklung der Geometrie erhalten. So ist es z. B. verkehrt, wenn manche Lehrbücher der Geometrie mit einer Aufzählung gewisser Eigenschaften des Raumes anheben, als da sind: Gleichartigkeit, Unbegrenztheit, Unendlichkeit, Teilbarkeit, Stetigkeit, Unbeweglichkeit usw. Mit Recht macht Peano[1]) hierzu die folgende Bemerkung: „Wollte man den Begriff des Raumes als grundlegend für die Geometrie betrachten, so würde daraus folgen, daß man ein Lehrbuch dieser Wissenschaft nicht schreiben könnte in einer Sprache, in der zufällig ein solches Wort fehlt. Folglich könnte man keine Geometrie schreiben in der Sprache des Euklid und des Archimedes, in der gerade das der Bezeichnung Raum in demjenigen Sinne entsprechende Wort fehlt, in welchem es in den heutigen Lehrbüchern gebraucht wird."

Ebensowenig ist es zu rechtfertigen, daß eine Geometrie mit Erklärungen der Begriffe von sogenannten allgemeinen Linien, Flächen oder Körpern beginne. Gerade die moderne Analysis hat gezeigt, daß mathematisch brauchbare Erklärungen dieser Begriffe nur möglich sind auf dem Grunde der Begriffe der geraden Linie und der ebenen Fläche. Es gibt Flächen, die keinen Körper, Linien, die keine Fläche begrenzen, Linien, deren Punkte überall im Raume liegen, die keine Länge, nirgends eine Richtung haben usf.

Hiernach wird es nicht Wunder nehmen, wenn wir alle sogenannten Definitionen der geraden Linie verwerfen. Über die Sinnlosigkeit der Definition der geraden Linie als der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten ist man jetzt wohl überall einig, ebenso derjenigen Definition, welche den Begriff der Richtung benutzen will. Daß auch der Begriff der Bewegung nichts helfen kann, wird nach dem Vorhergehenden klar sein; denn auch dieser Begriff kann nur mit Hilfe desjenigen der geraden Linie selbst scharf erklärt werden. Bei allen solchen Versuchen wird der exakte Denker finden, daß etwas erklärt ist durch einen Begriff, der selbst noch der Erklärung bedarf.

Es bleibt nichts anderes übrig als zu sagen: *Zwei von einander verschiedene Punkte bestimmen eine Gerade,* und nun durch weitere Axiome die Beziehungen der übrigen Punkte der Geraden und der verschiedenen Geraden zueinander zu postulieren. Hierbei ist durch das räumliche Anschauungsvermögen jedes Menschen, auch des Kindes, hinreichend dafür gesorgt, daß diese Sätze auch ohne die oben erwähnten allgemeinen Erklärungen verständlich sind. So sagt auch Pasch a. a. O. S. 16: „Die Grundbegriffe sind nicht definiert worden;

---

1) Peano, Sui fondamenti di Geometria, Rivista di Matematica, Vol. IV, p. 52.

keine Erklärung ist imstande, dasjenige Mittel zu ersetzen, welches allein das Verständnis jener einfachen, auf andere nicht zurückführbaren Begriffe erschließt, nämlich den Hinweis auf geeignete Naturobjekte." In der Tat sind es auch nicht die Eigenschaften, durch die man gewöhnlich die Grundgebilde erklärt, die als Beweismittel dienen, vielmehr ausschließlich die von uns aufzustellenden Axiome oder Postulate. Gerade die Erkenntnis der Tatsache, daß die Axiome in nichts anderem bestehen als in der Aufzählung derjenigen Eigenschaften der Objekte geometrischer Forschung, welche wir ohne Beweis annehmen und zum Ausgange aller weiteren Beweise machen, hätte vor dem Mißverständnisse bewahrt, als ob die Axiome dazu da seien, um die geometrischen Grundbegriffe erschöpfend zu erklären. Zu dieser Auffassung konnte wohl die *analytische* Geometrie verführen, in der der ganze Inhalt der Geometrie durch die Formeln der Algebra erschöpfend ausgedrückt scheint, wenn man vergißt, daß diese Formeln einen *geometrischen* Sinn erst erhalten auf Grund gewisser Elementarsätze der reinen Geometrie, daß sie aber auch vieler andrer Interpretationen fähig sind. Trotz alledem können natürlich die Figuren, die geometrische Betrachtungen erläutern, nur dem Zwecke der Erleichterung des Verständnisses dienen. Sie dürfen niemals einen wesentlichen Bestandteil eines Beweises bilden; die an der Figur vorgenommenen Operationen müssen vielmehr rein logisch gültig bleiben.

§ 1.

Die projektiven Postulate.

No. 1. Postulate der Geraden. Wir fangen nunmehr damit an, die gegenseitigen Beziehungen der Punkte und Geraden, die wir als unmittelbar gegeben annehmen, zu sogenannten *Postulaten* zu formieren, und leiten aus ihnen die elementarsten Sätze ab. Diese Axiome oder Postulate lauten:

1. **Postulat.** *Es gibt unbegrenzt viel Elemente, die wir Punkte nennen.*

Hiermit soll nur dies ausgedrückt sein, daß, so viel Punkte man auch angenommen haben mag, es doch immer noch weitere Punkte gibt.

2. **Postulat.** *Irgend zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen eindeutig eine unbegrenzte Menge von Punkten, der sie selbst angehören, und die* **Strecke** *genannt wird. Irgend zwei Punkte einer Strecke bestimmen eine andere Strecke, deren Punkte der ersten angehören.*

Wir bezeichnen die Strecke mit AB, wenn A und B die bestimmenden Punkte, ihre sogenannten *Endpunkte* sind. Nun postulieren wir weiter:

3. **Postulat.** *Ist C ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so gehört ein vierter Punkt D dieser Strecke entweder der Strecke $\overline{AC}$ oder der Strecke $\overline{CB}$ an, doch niemals beiden zugleich.*

Hieraus folgt:

1. Satz. *Gehört C der Strecke $\overline{AB}$ an, so kann weder B der Strecke AC noch A der Strecke BC angehören.*

Ist nämlich D ein von C verschiedener Punkt von $\overline{CB}$, so gehört er nach dem 2. Postulate auch $\overline{AB}$ an, also wenn B der Strecke $\overline{AC}$ angehört, auch $\overline{AC}$, was eben durch das 3. Postulat ausgeschlossen ist. Analog beweist man, daß A nicht auf $\overline{BC}$ liegen kann.

Nun nehmen wir weiter an:

4[a]. **Postulat.** *Ist C ein von B verschiedener Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und B ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$, so gehört C, also auch B der Strecke $\overline{AD}$ an.*

Da hiernach und nach dem 1. Satze D nicht der Strecke $\overline{AB}$ angehören kann, so stellen wir die Definition auf:

1. Definition. *Die Menge derjenigen Punkte D, welche mit A solche Strecken bestimmt, daß der Punkt B der Strecke $\overline{AD}$ angehört, heißt die Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ über B hinaus und wird mit $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet.*

Hierbei lassen wir es dahingestellt, ob *jede* Strecke über jeden Endpunkt hinaus verlängert werden kann, wir beschränken uns vielmehr, wie es der Entstehung der geometrischen Axiome entspricht, auf begrenzte Teile der geraden Linien, ihre sogenannten erreichbaren Punkte.

Auf Grund dieser Definition gilt der Satz:

2. Satz. *Ein von A und B verschiedener Punkt der Strecke $\overline{AB}$ kann nicht gleichzeitig einer ihrer Verlängerungen angehören.*

Dies folgt unmittelbar aus dem ersten Satze. Wir erschöpfen nun das über die Gerade Erforderliche durch das folgende Postulat:

4^b. Postulat. *Ist C ein Punkt der Strecken AB und $\overline{AD}$, so liegt entweder B auf $\overline{AD}$ oder D auf $\overline{AB}$.*

Hieraus folgt derjenige Satz, den wir auch selbst statt der Postulate 4^a und 4^b hätten postulieren können, zumal auch er unmittelbarer Anschauung entspricht. Er lautet:

3. Satz. *Ist C ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so fällt die Verlängerung $\overrightarrow{CB}$ mit der Verlängerung $\overrightarrow{AB}$ zusammen, und die Verlängerung $\overrightarrow{AC}$ besteht aus der Strecke $\overline{CB}$ und der Verlängerung $\overrightarrow{AB}$.*

Ist nämlich D ein Punkt von $\overrightarrow{AB}$, liegt also B auf AD, so liegt nach dem 2. Postulate auch C auf AD, B muß also, weil er nicht auf $\overline{AC}$ liegen kann, nach dem 3. Postulate der $\overline{CD}$ angehören. Ist dies umgekehrt der Fall, so gehört nach dem 4.^a Postulate auch B der Strecke $\overline{AD}$ an. Daß ferner jeder Punkt der Verlängerung $\overrightarrow{AC}$ entweder der Strecke $\overline{CB}$ oder der Verlängerung $\overrightarrow{AB}$ angehört, folgt aus dem 4.^b und dem 3. Postulate. Stellt man daher die Definition auf:

2. Definition. *Eine* ***Gerade*** *AB besteht aus den Punkten der Strecke $\overline{AB}$ und aus denen der beiden Verlängerungen,*

so können wir den Satz beweisen:

4. Satz. *Eine Gerade ist durch irgend zwei ihrer Punkte bestimmt.*

Ist nämlich C irgend ein Punkt der Geraden AB, so beweisen wir, daß jeder Punkt von AC der AB angehört und umgekehrt. Gehört C zuerst der Strecke $\overline{AB}$ an, so liegt jeder Punkt von $\overline{AC}$

auch auf $\overline{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ fällt mit $\overrightarrow{BA}$ zusammen und $\overrightarrow{AC}$ besteht aus $\overline{CB}$, die der Strecke $\overline{AB}$ angehört, und $\overrightarrow{AB}$. Umgekehrt gehört jeder Punkt der Strecke $\overline{AB}$ entweder $\overline{AC}$ oder $\overline{CB}$, d. h. der Verlängerung $\overrightarrow{AC}$ an, während $\overrightarrow{BA}$ mit $\overrightarrow{CA}$ zusammenfällt und $\overrightarrow{AB}$ der Verlängerung $\overrightarrow{AC}$ angehört. Liegt C auf der Verlängerung $\overrightarrow{AB}$, so gilt derselbe Beweis nach Vertauschung von B und C.

No. 2. Postulate der Ebene. Um nunmehr zum Begriffe der *Ebene* zu gelangen, stellen wir die neuen Postulate auf:

5. Postulat. *Außerhalb jeder Geraden gibt es Punkte.*

6. Postulat. *Wenn A, B, C irgend drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte sind, D ein Punkt der Strecke $\overline{BC}$ und E ein Punkt der Strecke $\overline{AD}$, dann gibt es einen der Strecke $\overline{AB}$ angehörigen Punkt F derart, daß E auf der Strecke $\overline{CF}$ liegt.*

Hieraus beweisen wir zuerst den Satz:

5. Satz. *Wenn A, B, C drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte sind, D ein Punkt der Strecke $\overline{BC}$ und F ein Punkt von $\overline{AB}$, dann gibt es einen den Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{CF}$ gemeinsamen Punkt E.* (Fig. 1.)

Ist nämlich P ein Punkt von $\overline{CF}$, so gibt es nach dem 6. Postulate einen Punkt Q auf $\overline{BC}$ so, daß P auf $\overline{AQ}$ liegt, wobei Q nach dem 3. Postulate entweder auf $\overline{BD}$ oder auf $\overline{DC}$ liegt. Im ersten Falle gibt es einen Punkt R auf $\overline{AD}$ so, daß P auf $\overline{BR}$ liegt, und daher einen Punkt S auf $\overline{AC}$ so, daß R auf $\overline{BS}$ liegt. Deshalb liegt auch P auf $\overline{BS}$ und, weil R nicht auf $\overline{BP}$ liegen kann, R auf $\overline{PS}$. Daraus folgt, daß $\overline{CP}$ einen Punkt E enthält derart, daß R auf $\overline{AE}$ liegt, und daher schließlich auch $\overline{CQ}$ einen Punkt D' so, daß E auf $\overline{AD'}$ liegt. Dieser Punkt kann aber von D nicht verschieden sein, weil sonst nach dem 4. Satze die Geraden AR und BC zusammenfallen oder A auf BC liegen müßten. Im zweiten Falle ergibt sich unmittelbar, daß $\overline{AD}$ einen Punkt E so enthalten muß, daß P auf $\overline{CE}$ liegt, woraus der Satz wie oben folgt.

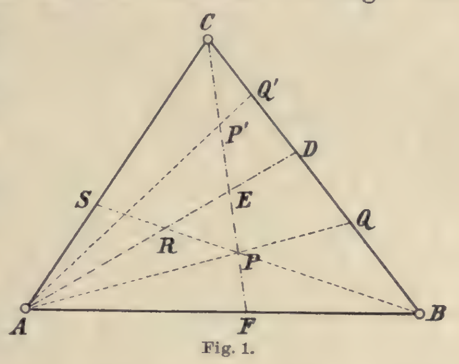


Fig. 1.

Hiernach können wir die Definition aufstellen:

3. Definition. *Die Menge derjenigen Strecken resp. Geraden, welche drei nicht in einer Geraden liegende Punkte mit den Punkten der jedes-*

mal durch die beiden andern Punkte bestimmten Strecke verbinden, heißt ***Dreieck*** *resp.* ***Ebene.***

Dann gilt der Satz:

6. Satz. *Die Ebene ist durch irgend drei ihrer Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, bestimmt.*

Sind nämlich A, B, C die die Ebene bestimmenden Punkte, so folgt zunächst aus dem 6. Postulate, daß jeder Punkt einer Strecke von einer Ecke des Dreiecks nach einem Punkte der gegenüberliegenden Seite (Strecke) auch auf solchen Strecken durch die beiden andern Ecken liegt. Weiter folgt, daß jede Gerade durch eine Ecke A und einen Punkt D von $\overrightarrow{BC}$ der Ebene angehört. Gehört nämlich der Punkt P dieser Geraden der Strecke $\overline{AD}$ selbst an, so haben die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BP}$ nach dem 5. Satze einen gemeinsamen Punkt. Gehört zweitens P der Verlängerung $\overrightarrow{AD}$ an, so haben nach dem 6. Postulate die Strecke $\overline{AB}$ und die Verlängerung $\overrightarrow{PC}$ einen Punkt gemein. Gehört endlich P der Verlängerung $\overrightarrow{DA}$ an, so haben wieder nach dem 5. Satze die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CP}$ einen gemeinsamen Punkt. Es liegt demnach jeder Punkt einer Geraden, die eine Ecke des Dreiecks mit einem Punkte der Verlängerungen der gegenüberliegenden Seite verbindet, auch auf einer Geraden durch eine Ecke und einen Punkt der Seite selbst, gehört also der Ebene an.

Jetzt ist weiter leicht zu sehen, daß jede Gerade, die zwei Seiten des Dreiecks trifft, ganz in der Ebene enthalten ist. Für die Punkte dieser Strecke $\overline{DE}$ selbst (D auf AB, E auf $\overline{AC}$) folgt dies aus dem 6. Postulate; denn danach enthält, wenn P ein Punkt von DE ist, $\overrightarrow{AP}$ einen Punkt von EB, also auch von $\overline{BC}$. Ist ferner P ein Punkt von $\overrightarrow{DE}$, so lehrt Dreieck (ABP), daß die Strecke $\overline{BP}$ einen Punkt von $\overrightarrow{AE}$ enthält, also entweder einen Punkt von EC oder von $\overrightarrow{EC}$, d. h. entweder einen Punkt von $\overline{AC}$ oder von $\overrightarrow{AC}$, daß P also auch im zweiten Falle nach dem eben Bewiesenen der Ebene angehört. Ebenso folgt es für einen Punkt P von $\overrightarrow{ED}$ durch Betrachtung des Dreiecks (ACP).

Nunmehr ist es klar, daß die Ebene ABC mit der Ebene ABD zusammenfällt, wenn D irgend ein Punkt der Geraden AC oder BC ist. Denn nach dem eben Bewiesenen gehört jede Gerade, die die Ecke des einen Dreiecks mit einem Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, der durch das andere bestimmten Ebene an. Es kann daher jede Ecke C des bestimmenden Dreiecks durch irgend einen nicht

auf AB gelegenen Punkt der Ebene ersetzt werden. Für die Punkte des Dreiecks (ABC) selbst ist dies evident. Liegt aber D auf einer Geraden durch A oder B, z. B. auf AE, wo E der Seite $\overline{BC}$ angehört, so fällt die Ebene ABC mit ABE und diese mit ABD zusammen. Liegt endlich D auf CE und E auf AB, so fällt die Ebene ABC mit BCE, diese mit BDE und letztere mit ABD zusammen. Durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergibt sich der 6. Satz.

Die Zurückführung des Begriffes der Ebene auf diejenigen des Punktes und der Geraden durch das letzte Postulat verdankt man Peano (a. a. O. S. 65). Daß allerdings der 5. Satz nicht, wie Peano annimmt, als Postulat aufgestellt zu werden braucht, hat erst E. A. Moore[1]) bemerkt. Es scheint dies der einfachste und natürlichste Weg zu sein, den Begriff der Ebene einzuführen, und er dürfte demjenigen vorzuziehen sein, bei welchem die Ebene als neues Element postuliert wird, wie es Pasch und Hilbert getan haben. Denn die Peanosche Definition der Ebene bringt deren Zusammensetzung aus ihren Geraden am besten zum Ausdruck. Eine solche Definition ist ja schon früher in roher Weise versucht worden, indem man die Ebene als eine Fläche definierte, die jede Gerade enthält, mit der sie zwei Punkte gemein hat. Aber es ist klar, daß eine derartige Definition ohne neue Axiome nicht erlaubt ist. Denn aus den Axiomen der Geraden folgt keineswegs, daß die Geraden, die einen Punkt mit den Punkten einer ihn nicht enthaltenen Geraden verbinden, eine Fläche dieser Art bilden.

Um dies klar erkennen zu lassen, wird es vielleicht nützlich sein, ein System von Linien anzugeben, das die Postulate der Geraden erfüllt, nicht aber diejenigen der Ebene. Wir wenden hier zum ersten Male eine Methode zum Beweise der Unabhängigkeit neuer Axiome von den alten an, die die Sätze der gewöhnlichen euklidischen Geometrie als gegeben voraussetzt. Die Berechtigung einer solchen Beweismethode kann durch den Hinweis auf die analytische Geometrie dargetan werden, in der man sich die Punkte als Tripel von je drei Zahlen, ihren Koordinaten, zu denken hat und die Linien und Flächen als durch Gleichungen zwischen diesen definiert (vgl. hierzu § 6).

In diesem Sinne sehen wir als Punkte des von uns zu betrachtenden Liniensystems alle Punkte eines dreidimensionalen Raumes an mit Ausnahme eines Punktes O und derjenigen von zwei diesen nicht

---

1) E. H. Moore, On the projective axioms of geometry, Trans. of the Amer. Math. Soc., vol. 3 (1902), p. 147.

enthaltenen windschiefen Geraden und als Geraden die Kegelschnitte, die O enthalten und die beiden Geraden treffen, indem wir zugleich diejenigen Stücke der Kegelschnitte als die Strecken zwischen zwei Punkten betrachten, welche O nicht enthalten. Dann gelten offenbar die ersten fünf Postulate, das 6. Postulat aber nur für je drei Punkte A, B, C, die mit O und den beiden Geraden demselben Hyperboloide angehören.

Auf die älteren verfehlten Versuche, den Begriff der Ebene mit Hilfe desjenigen der Kongruenz zu entwickeln, braucht hier nicht eingegangen zu werden, da jede axiomatische Begründung fehlt. Denn wo eine solche wirklich durchgeführt worden ist wie z. B. von Pieri[1]), zeigt es sich, daß durch die Zusammenfassung der projektiven Postulate mit denen der Bewegung keins dieser Postulate sich als überflüssig herausstellte. Mögen in der Tat auch zwischen beiden Gruppen von Postulaten innige Beziehungen bestehen, so sind dieselben infinitesimaler Natur[2]) und können deshalb bei anschauungsmäßigen Grundlegung der Geometrie schwerlich zur Geltung kommen.

Aus der Definition der Ebene und aus dem 4. Satze ergibt sich nun unmittelbar ihre fundamentale Eigenschaft:

7. Satz. *Jede Gerade, die zwei Punkte einer Ebene enthält, ist ganz in dieser enthalten.*

Weiter aber folgt der Satz:

8. Satz. *Eine Ebene wird durch jede ihrer Geraden so in zwei Teile geteilt, daß die Strecke von einem Punkte des einen Teiles nach einem Punkte des anderen Teiles stets einen Punkt der Geraden enthält, diejenigen von einem Punkte des einen Teiles nach einen Punkte desselben aber keinen.*

Ihrer Definition gemäß zerfällt nämlich die Ebene ABC in sieben Teile, in das Dreieck (ABC) selbst, die drei Teile (BC), (CA), (AB), die aus den Verlängerungen der Transversalen über die Seiten, und die drei Teile (A), (B), (C), die aus den Verlängerungen der Transversalen über die Ecken hinaus bestehen. Nun ist klar, daß jede Strecke, die C mit einem Punkte P der Teile (AB), (A) oder (B) verbindet, einen Punkt der Geraden AB enthält. Für den

1) Pieri, Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, Mem. della Acc. di Torino, 1899.

2) S. z. B. Schur, Über den Zusammenhang der Räume konstanten Riemannschen Krümmungsmaßes mit den projektiven Räumen, Math. Ann. Bd. 27, S. 537 ff. und Lie, Theorie der Transformationsgruppen, Leipzig, 1893, 3. Abschn. V. Abth.

Teil (AB) folgt dies aus der Definition. Für den Teil (A) folgt es aus dem 6. Postulate durch Betrachtung des Dreiecks (BCP) und entsprechend für (B). Enthält umgekehrt $\overline{CP}$ einen Punkt E der Geraden AB, so gehört P einem dieser drei Teile an, nämlich den Teilen (AB), (A) oder (B), je nachdem E der Strecke $\overline{AB}$ selbst oder den Verlängerungen $\overrightarrow{BA}$ oder $\overrightarrow{AB}$ angehört, wie durch Betrachtung derselben Dreiecke folgt. Liegt daher P in einem der andern vier Teile der Ebene, so kann die Strecke $\overline{CP}$ keinen Punkt der Geraden AB enthalten. Da nun C selbst diesen vier Teilen angehört und nach dem 6. Satze A, B, C irgend drei Punkte der Ebene sein können, so ist unser Satz bewiesen.

No. 3. Postulate des Raumes. Nunmehr bedürfen wir eigentlich nur noch eines Postulats, nämlich des folgenden:

7. Postulat. *Außerhalb jeder Ebene gibt es Punkte.*

Wir stellen dann die Definition auf:

3. Definition. *Die Menge der Punkte derjenigen Geraden, welche erstens jeden von vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten mit den Punkten des durch die drei anderen bestimmten Dreiecks und zweitens die Punkte der Strecke durch je zwei der vier Punkte mit denjenigen der Strecke durch die beiden andern verbinden, heißt ein Raum.*

Auf Grund dieser Definition können wir wiederum den Satz beweisen.

9. Satz. *Ein Raum ist durch irgend vier seiner Punkte, die nicht derselben Ebene angehören, vollkommen bestimmt.*

Sind nämlich A, B, C, D die vier bestimmenden Punkte und E auf $\overline{AB}$ gelegen, so gehört die Ebene CDE (Fig. 2) der Definition ganz dem Raume an. Daraus folgt zuerst, daß jeder Punkt der Verbindungsstrecke einer Ecke des Tetraeders $(ABCD)$ mit einem Punkte des gegenüberliegenden Dreiecks auch auf einer ebensolchen für die drei andern Ecken liegt, und daß ebenso jeder Punkt der Verbindungsstrecke von Punkten zweier gegenüberliegenden Kanten des Tetraeders auf den Verbindungsstrecken der Ecken mit den Punkten der gegenüberliegenden Dreiecke

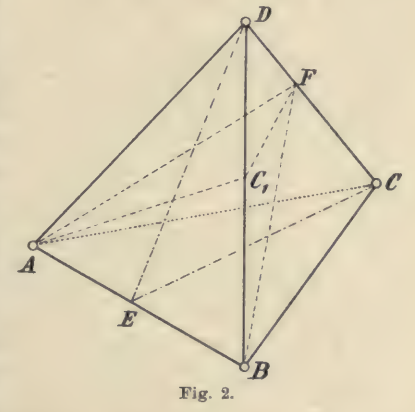


Fig. 2.

liegt, und umgekehrt. Die Betrachtung der Ebene CDE lehrt aber auf Grund des 7. Satzes weiter, daß dem Raume angehören: 1) Die Verbindungsgerade jedes Punktes einer Kante (CD) mit irgendeinem Punkt einer Fläche (auf CE oder DE) des Tetraeders. 2) die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte zweier Flächen (auf CE und DE), die mit einer Kante (CD) in einer Ebene liegt.

Aus 1) folgt, daß auch die Ebene AFG (F auf CD und G auf BD) dem Raume angehört, daß also auch 3) jede Verbindungsgerade irgend zweier Punkte zweier Flächen (auf AF, AG, oder FG) des Tetraeders dem Raume angehört. Auf Grund dieser drei Bemerkungen folgt leicht, daß das Tetraeder ($ABCF$) dieselben Punkte liefert wie das Tetraeder ($ABCD$), wenn F irgendein Punkt der durch D laufenden Kanten dieses Tetraeders ist, und umgekehrt. Hieraus läßt sich wie beim Dreieck zeigen, daß man jede Ecke D des bestimmenden Tetraders ($ABCD$) durch irgendeinen Punkt F des Raumes ersetzen kann, so daß sich unser Satz durch wiederholte Anwendung dieses Schlusses ergibt.

Daraus folgt der zu dem sechsten analoge Satz:

10. Satz. *Ein Raum wird durch jede Ebene desselben so in zwei Teile geteilt, daß die Strecke von einem Punkte des einen Teiles nach einem Punkte des andern stets einen Punkt der Ebene enthält, diejenige von einem Punkte des einen Teiles nach einem Punkte desselben aber keinen.*

Der Definition gemäß zerlegt nämlich das bestimmende Tetraeder $ABCD$ den Raum in 15 Teile, das Tetraeder selbst, die 4 Teile (A), (B), (C), (D), die aus den Verlängerungen der Definitionsgeraden über die Ecken hinaus und die vier Teile [ABC] usw., die aus den Verlängerungen der Definitionsgeraden über die Seitenflächen hinaus bestehen, und endlich die sechs Teile (AB), (CD) usw., die aus den Verlängerungen über die Kanten hinaus bestehen. Nun bestimmt aber jeder Punkt P der Teile [ABC], (A), (B), (C), (AB), (BC) oder (CA) mit dem Punkte D eine Strecke, auf der ein Punkt der Ebene ABC liegt, und es läßt sich umgekehrt zeigen, daß der Punkt P, falls die Strecke $\overline{PD}$ einen Punkt der Ebene ABC enthält, einem dieser sieben Teile angehören muß. Liegt daher P in einem der andern acht Teile, so kann die Strecke PD keinen Punkt der Ebene ABC enthalten. Da nun nach dem 9. Satze A, B, C, D irgend vier Punkte des Raumes sein können, so ist der Satz bewiesen.[1])

1) Nachdem die früheren Sätze in aller Ausführlichkeit bewiesen wurden,

Nunmehr können wir den Satz beweisen:

11. Satz. *Zwei Ebenen eines Raumes, die einen Punkt gemein, haben, haben auch eine Gerade gemein.* (Fig. 3).

Haben nämlich die beiden Ebenen α und β den Punkt S gemein und ist AB irgendeine Strecke von α, auf der S liegt, so daß sich A und B in verschiedenen Teilen des durch β zerlegten Raumes befinden, so liegt irgendein vierter nicht auf AB gelegener Punkt C von α entweder mit A oder mit B in demselben dieser beiden Teile. Liegt er z. B. mit B in demselben Teile, so liegen A und C in verschiedenen Teilen, so daß die Strecke $\overline{AC}$ einen von S verschiedenen Punkt D von β enthalten muß; die Ebenen α und β haben folglich die Gerade SD gemeinsam.

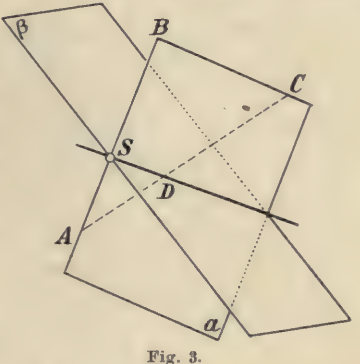


Fig. 3.

Es bedarf aber noch einer Bemerkung über die Fassung unseres Satzes. In der gewöhnlichen Fassung: „Zwei Ebenen *des* Raumes usw.“ kann er natürlich aus den bisherigen Postulaten nicht bewiesen werden, weil wir in Fortsetzung des von uns eingeschlagenen Weges auch Räume durch 5, 6 und mehr Punkte definieren könnten, innerhalb deren zwei Ebenen nicht mehr als *einen* Punkt gemein haben. Um dies auszuschließen, bedarf es eines neuen Postulates:

8. Postulat. *Außerhalb eines Raumes gibt es keine Punkte.*

Man sieht aber sehr wohl, daß dies Postulat einen andern Charakter hat als die vorhergehenden. Rein begrifflich hindert natürlich nichts, das Gegenteil davon zu postulieren. Wir müssen daher dies Postulat entweder als eine reine Konvention ansehen, gerade so, wie wir uns zuweilen auf die Geometrie der Ebene beschränken, oder wir müssen es mit Veronese[1]) als ein *praktisches Postulat* bezeichnen, das aussagt, daß unser Erfahrungsraum ein solcher von drei Dimensionen sei. Statt dessen könnte man auch mit Hilbert den 11. Satz selbst als Axiom aufstellen; allein es tritt hierbei der wahre Charakter eines solchen Axioms nicht so deutlich hervor.

dürfte die vollständige Ausführung der oben skizzierten Beweise des 9. und 10. Satzes keine Schwierigkeiten bieten.

1) Veronese, Elementi di Geometria, Padova 1897, p. 112.

§ 2.

Der Satz des Desargues und die idealen Elemente. Zentrale Kollineation und harmonische Punkte.

No. 4. Satz von den perspektiven Dreikanten. Bezeichnen wir die Gesamtheit der Geraden resp. Ebenen durch einen Punkt als Strahlenbündel, resp. Ebenenbündel, so ist klar, daß die Geometrie in einem solchen Strahlen- oder Ebenenbündel vollkommen *dual* ist; je zwei Strahlen eines Bündels bestimmen eine Ebene und je zwei Ebenen einen Strahl. Um eine entsprechende Dualität in der Ebene zu erreichen, beweisen wir zuerst den sogenannten *Desarguesschen Satz* im Bündel. Bezeichnen wir die Zusammenfassung von drei Strahlen eines Bündels als Dreikant und deren Verbindungsebenen als die Seitenflächen des Dreikants, so lautet der Satz folgendermaßen:

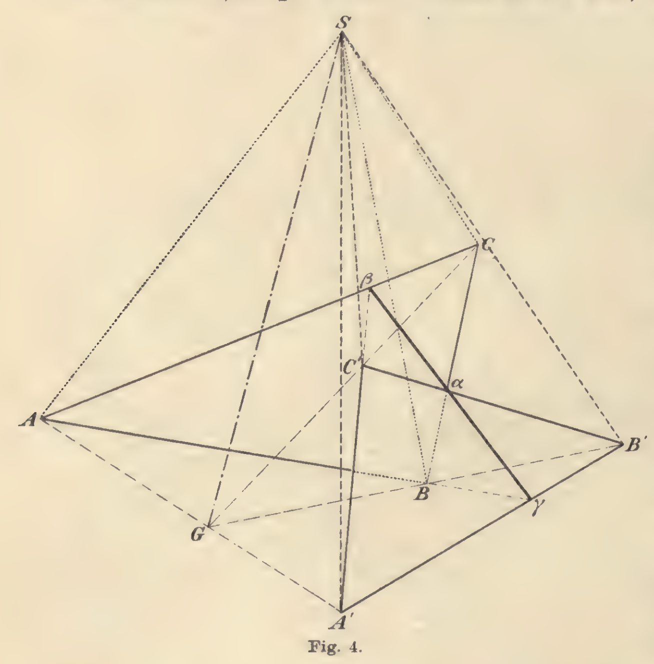


Fig. 4.

12. Satz. *Gehen die Verbindungsebenen entsprechender Kanten zweier Dreikante abc und $a'b'c'$ mit derselben Spitze S durch eine Gerade g, so schneiden sich die entsprechenden Seitenflächen in derselben Ebene, und umgekehrt.* **(Satz von den perspektiven Dreikanten).**

Zum Beweise [1]) nehmen wir auf a resp. a' die Punkte A resp. A' auf verschiedenen Seiten von g an, so daß AA' einen Punkt G von g enthält (Fig. 4). Alsdann nehmen wir auf b' den Punkt B' so an, daß er auf der entgegengesetzten Seite von b liegt wie G, so daß die Strecke $\overline{GB'}$ einen Punkt B von b enthält. Hierbei können wir annehmen, daß die Ebene ABG die Spitze S nicht enthält, weil sonst die Seitenflächen SAB und $S'A'B'$ zusammenfielen, in welchem Falle der Satz selbstverständlich wäre. Da ebendeshalb auch der Strahl c nicht in der Ebene ABG liegt, so können wir endlich den Punkt C auf c außerhalb dieser Ebene und auf der andern Seite von c' wie G annehmen, so daß die Strecke GC einen Punkt C' von c' enthält. Da nun AB und $A'B'$ in derselben Ebene durch G liegen, so sind hiernach die Ebenen ABC und $A'B'C'$ von einander verschieden. Weiter aber lehrt die Betrachtung der Dreiecke GCB', ACA', $AA'B'$, daß die Strecken BC und $B'C'$ einen Punkt α gemein haben, die Gerade $A'C'$ einen Punkt β der Strecke AC enthält und die Gerade AB einen Punkt γ der Strecke $A'B'$. Da aber α, β, γ in den beiden Ebenen ABC und $A'B'C'$ liegen müssen, so liegen sie in deren Schnittgeraden, womit unser Satz bewiesen ist.

Die Umkehrung des Satzes kann indirekt bewiesen werden. Schneiden sich nämlich die entsprechenden Seitenflächen der beiden Dreikante abc und $a'b'c'$ auf der Ebene ε und bezeichnen wir mit g resp. c_1 die Schnittlinien der beiden Ebenen $[a, a']$ und $[b, b']$ resp. $[g, c]$ und $[a', c']$, so liegen die beiden Dreikante abc und $a'b'c_1$ perspektiv, und es schneiden sich daher die Ebenen $[a, b]$ und $[a', b']$, $[a, c]$ und $[a', c_1] = [a', c']$, $[b, c]$ und $[b', c_1]$ auf einer Ebene, die hiernach mit ε zusammenfallen muß. Deshalb enthält auch die Ebene $[b', c_1]$ noch eine weitere Gerade der Ebene $[b', c']$, fällt also mit dieser zusammen und infolgedessen auch die Kante c_1 mit c'.

No. 5. Ideale Punkte. Aus dem Satze von den perspektiven Dreikanten läßt sich nun derjenige Satz beweisen, welcher uns die Grundlage für die Einführung der sogenannten idealen Elemente liefern wird. Der Satz lautet:

13. Satz. *Werden zwei Strahlenbündel S und S' so auf einander bezogen, daß jedem Strahle durch S, der eine feste Ebene ε trifft, der Verbindungsstrahl von S' mit diesem Schnittpunkte zugewiesen wird, so ist dadurch jedem Strahle von S eindeutig ein Strahl von S' zuge-*

1) V. Reyes y Prosper, Sur les propriétés graphiques des figures centriques Math. Ann. Bd. 32, S. 157.

wiesen und umgekehrt derart, daß je drei Strahlen einer Ebene wieder drei Strahlen einer Ebene und die gemeinsamen Ebenen der beiden Strahlenbündel sich selbst entsprechen.

Wir beweisen zuerst, daß allen Ebenen, die ε schneiden und denselben Strahl g durch S enthalten, Ebenen durch denselben Strahl g' von S' entsprechen, und zwar auch in dem Falle, daß g die ε *nicht* schneidet. Dies soll freilich nicht bedeuten, daß solch ein gemeinsamer Punkt von g und ε vielleicht überhaupt nicht vorhanden sei, vielmehr fordern wir dabei nur, daß beim Beweise von einem solchen Schnittpunkte abgesehen werde, daß also nur solche Punkte von g benutzt werden mögen, die auf derselben Seite von ε liegen. Schneiden daher irgend drei Ebenen durch g die ε in den drei Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (Fig. 5), so dürfen auch von jeder dieser Geraden nur solche Punkte benutzt werden, die auf derselben Seite jeder der beiden andern Geraden liegen. Sind deshalb A und A_1 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{a}$ und β irgend ein Punkt von ε, der auf der andern Seite von $\mathfrak{c}$ liegt wie A, so gilt dasselbe von A_1 und die Strecken $\overline{A\beta}$ und $\overline{A_1\beta}$ enthalten je einen Punkt C resp. C_1 von $\mathfrak{c}$. Nach willkürlicher Wahl des Punktes B auf $\mathfrak{b}$ nehmen wir endlich den Punkt B_1 auf $\mathfrak{b}$ so an, daß B_1 und C_1 auf verschiedenen Seiten von BC liegen, so daß die Strecke $\overline{B_1 C_1}$ einen Punkt α der Geraden BC enthält.

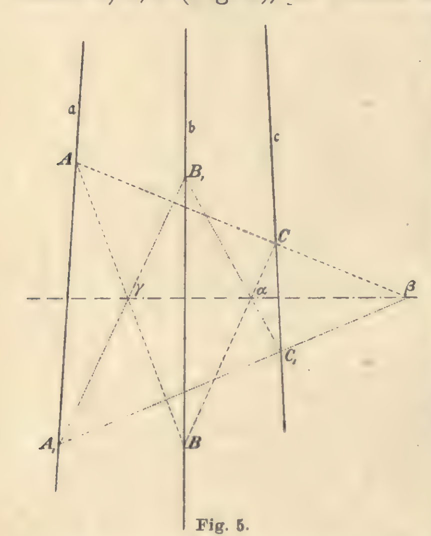


Fig. 5.

Dann lehrt die Anwendung des 6. Postulats auf das Dreieck $A_1 B_1 \beta$, daß die Strecke $\overline{A_1 B_1}$ einen Punkt γ der Geraden $\alpha\beta$ enthalten muß. Da aber der Voraussetzung gemäß die Dreikante $S(ABC)$ und $S(A_1 B_1 C_1)$ in Beziehung auf g perspektiv liegen, so geht auch die Gerade AB durch γ. Nunmehr sind die Dreikante $S'(ABC)$ und $S'(A_1 B_1 C_1)$ so beschaffen, daß die Schnittlinien entsprechender Seitenflächen, nämlich $S'\alpha$, $S'\beta$, $S'\gamma$ in einer Ebene liegen, folglich gehen auch die Verbindungsebenen entsprechender Kanten, nämlich $S'\mathfrak{a}$, $S'\mathfrak{b}$, $S'\mathfrak{c}$ durch denselben Strahl g'.

Die Beziehung der beiden Strahlenbündel ist also sicher eine solche, daß *jedem* Strahle von S eindeutig ein Strahl von S' ent-

spricht, und umgekehrt, und drei Strahlen einer Ebene, die ε schneidet, wieder drei Strahlen einer Ebene entsprechen, der Ebene nämlich durch S' resp. S und die Schnittlinie mit ε.

Handelt es sich aber um drei Strahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einer Ebene, die ε *nicht* trifft, so wählen wir auf der Schnittlinie irgendeiner Ebene durch $\mathfrak{c}$ mit ε irgend zwei Punkte A und B und setzen $SA = a$, $SB = b$ und $(\mathfrak{b}A, \mathfrak{a}B) = c$. Ebenso wählen wir auf der Schnittlinie irgendeiner Ebene durch $\mathfrak{b}$ mit ε irgend zwei Punkte A_1 und C_1 und setzen $SA_1 = a_1$, $SC_1 = c_1$ und $(\mathfrak{a}C_1, \mathfrak{c}A_1) = b_1$. Alsdann schneiden sich die entsprechenden Seitenflächen der beiden Dreikante abc und $a_1b_1c_1$ in den Geraden $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ einer Ebene, so daß die Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 durch denselben Strahl g laufen. Da aber diese drei Ebenen die ε schneiden, so liegen auch die entsprechenden Dreikante $a'b'c'$ und $a_1'b_1'c_1'$ in Beziehung auf den g entsprechenden Strahl g' perspektiv, es liegen daher, weil auch die Seitenflächen dieser Dreikante die ε schneiden, auch die $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entsprechenden Strahlen $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ in einer Ebene.

Daß jede Ebene durch SS', die ε schneidet, sich selbst entspricht, ist evident, d. h. jedem in einer solchen Ebene gelegenen Strahle g von S entspricht ein Strahl g' von S', der mit g in einer Ebene liegt. Trifft aber die Ebene Sg' die ε nicht, liegen also S und S' auf derselben Seite von ε, so entspricht den Strahlen g und g' in einem Strahlenbündel durch S'', sobald S'' auf der andern Seite von ε liegt, ein Strahl g'', der sowohl mit g als mit g' in derselben Ebene liegt. Ist daher η die Ebene durch g'' und irgendeinen Punkt T der Strecke SS' und schneidet sie deshalb die ε in einer Geraden $\mathfrak{g}$, so entspricht dem Strahle g von S auch in Beziehung auf die Ebene η derselbe Strahl g' von S', nämlich die Schnittlinie der Ebenen $S'\mathfrak{g}$ und $S'g''$. Da aber S und S' auf verschiedenen Seiten von η liegen, so gehören in der Tat g und g' derselben Ebene an.

Aus unserm Satze geht hervor, daß irgend zwei Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer Ebene ε unabhängig davon, ob sie einen gemeinsamen Punkt haben oder nicht, ein *Strahlenbündel* in dem Sinne bestimmen, daß es durch jeden Punkt einen und nur einen Strahl schickt, und je zwei solcher Strahlen derselben Ebene angehören. Liegt der Punkt S außerhalb von ε, so ist der Strahl die Schnittlinie g der Ebenen $S\mathfrak{a}$ und $S\mathfrak{b}$, und der Satz lehrt, daß $g' = (S'\mathfrak{a}, S'\mathfrak{b})$ mit g, ebenso aber mit denjenigen Strahlen in je einer Ebene liegt, welche die Ebenen durch g mit ε bestimmen. Hierdurch ist also auch der

Strahl $\mathfrak{c}$ bestimmt, der durch irgendeinen Punkt C von ε läuft, als Schnittlinie nämlich von ε mit Cg oder Cg'. Figur 5 lehrt aber auch, wie man irgendeinen Punkt C_1 von $\mathfrak{c}$ durch Konstruktionen finden kann, *die ganz innerhalb der Ebene ε verlaufen.* Seien nämlich A und A_1 irgend zwei Punkte von $\mathfrak{a}$ und B ein ebensolcher von $\mathfrak{b}$, B_1 hingegen ein solcher Punkt von $\mathfrak{b}$, daß er auf der andern Seite von AB liegt wie A_1, so enthält die Strecke $\overline{A_1 B_1}$ einen Punkt γ der Geraden AB. Ist dann weiter β irgendein Punkt der Geraden AC, der auf der andern Seite von BC liegt wie γ, so daß die Strecke $\beta\gamma$ einen Punkt α der Geraden BC enthält, so lehrt die Betrachtung des Dreiecks $(A_1 B_1 \beta)$, daß die Strecke $\overline{A_1 \beta}$ einen Punkt C_1 der Geraden $B_1 \alpha$ enthält, und dieser Punkt ist offenbar der gesuchte.

Dies veranlaßt dazu, auch in dem Falle, daß wir über den etwaigen Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ nichts wissen, daß er also vielleicht *nicht* vorhanden ist, von einem *idealen* Zentrum des durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bestimmten Bündels oder Büschels innerhalb der Ebene ε zu reden. Wir wollen dies in den Satz zusammenfassen:

14. Satz. *Jede Gerade bestimmt mit jeder Ebene, oder je zwei Geraden derselben Ebene bestimmen das Zentrum eines Bündels von Strahlen derart, daß durch jeden Punkt einer hindurchgeht und je zwei Strahlen des Bündels in derselben Ebene liegen. Ist die Existenz des Zentrums nicht verbürgt, so wird es* ***idealer Punkt*** *genannt.*

No. 6. Ideale Geraden. Sind zwei ideale Punkte mit den zugehörigen Bündeln gegeben, so ist unmittelbar klar, daß durch jeden Punkt S eine gemeinsame Ebene der beiden Bündel geht; sie ist bestimmt durch die Strahlen, welche die beiden Bündel durch den Punkt S schicken, und es liegen in ihr noch beliebig viel Strahlenpaare der beiden Bündel. Besitzen zwei solche Ebenen keinen gemeinsamen Punkt oder ist ein solcher nicht verbürgt, so können wir doch von einer *idealen Geraden* des durch die beiden idealen Punkte bestimmten Ebenenbüschels reden. Denken wir uns, was immer möglich ist, die beiden idealen Punkte bestimmt durch eine gemeinsame Ebene ε ihrer Bündel und durch zwei Strahlen g und h von S, so wird jeder Strahl k der Ebene $[g, h]$ durch S mit ε einen idealen Punkt bestimmen, den wir als der idealen Geraden angehörig betrachten können. Denn schicken die drei idealen Punkte (g, ε), (h, ε), (k, ε) durch irgend einen andern Punkt S' die Strahlen g', h', k', so liegen diese nach dem 13. Satze in einer Ebene, die unserm Büschel angehört und zugleich jedem der zu den drei idealen Punkten gehörigen Bündel. Wir wollen dies in den Satz zusammenfassen:

15. Satz. *Je zwei Ebenen oder je zwei ideale Punkte bestimmen ein Büschel von Ebenen oder von idealen Punkten derart, daß durch jeden Punkt eine seiner Ebenen geht, die zugleich allen zu den idealen Punkten gehörigen Bündeln gemeinsam ist; ist kein gemeinsamer Punkt dieser Ebenen verbürgt, so wird die Achse ihres Büschels eine* ***ideale Gerade*** *genannt.*

Hiernach kann man leicht den folgenden allgemeinen Satz beweisen:

16. Satz. *Je drei Ebenen oder jede Ebene und jede ideale Gerade oder je zwei ideale Geraden derselben Ebene haben einen wirklichen oder idealen Punkt gemein.*

Sind nämlich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die drei Ebenen, durch die der Punkt in jedem der drei Fälle bestimmt wäre, so schicken die Büschel ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$), ($\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$) durch jeden Punkt S je eine Ebene, α, β, γ, die sich in demselben Strahle g schneiden müssen. Denn schneiden sich β und γ in g, so gehören die Ebenen β und γ dem durch g und $\mathfrak{A}$ bestimmten Bündel an. Da ferner $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ den Büscheln ($\mathfrak{A}$, γ) und ($\mathfrak{A}$, β) resp. angehören, so gehören sie auch zum Bündel [$\mathfrak{A}$, g] und infolgedessen auch α, die dem Büschel ($\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$) angehört, d. h. g liegt auch in α.

No. 7. Satz des Desargues. Die Einführung der Begriffe eines idealen Punktes und einer idealen Geraden erlauben nunmehr der vollkommenen Dualität im Strahlenbündel eine ebensolche in der Ebene entgegenzustellen: *Je zwei Punkte bestimmen eine Gerade, und je zwei Geraden bestimmen einen Punkt.* Im besonderen erhält nun auch der Satz des Desargues von den perspektiven Dreiecken, der aus dem 12. Satze von den perspektiven Dreikanten unmittelbar vermittelst eines ebenen Durchschnitts folgt, einen allgemein gültigen Sinn. Er lautet:

17. Satz. *Sind zwei Dreiecke so aufeinander bezogen, daß die Verbindungslinien entsprechender Ecken durch einen Punkt laufen, so schneiden sich die entsprechenden Seiten auf einer Geraden (**Satz des Desargues**).*

Obwohl unser Beweis des Satzes nur für Dreiecke derselben Ebene ε anwendbar ist, so gilt der Satz doch auch für Dreiecke verschiedener Ebenen, ja in Fig. 4 war gerade dieser Fall (die Dreiecke (ABC) und ($A'B'C'$)) die Quelle des Beweises für den 12. Satz, nur daß wir jetzt weder die Ecken der beiden Dreiecke noch den Punkt G noch die Schnittpunkte α, β, γ der Seiten als wirkliche

Punkte anzunehmen brauchen; die Figur kann auch zum Teil oder ganz aus idealen Punkten oder Geraden bestehen.

Die allgemeine Form des Satzes erlaubt uns auch die Fundamentalkonstruktionen mit idealen Elementen, die wir mit Ausnahme der Aufgabe, die Gerade durch einen eigentlichen und einen idealen Punkt zu legen, nur mit Hilfe eines Strahlenbündels, auf das wir die Ebene bezogen, lösen konnten, ganz innerhalb der Ebene auszuführen. Da handelt es sich zuerst um die Aufgabe den Punkt γ zu bestimmen, den *eine eigentliche Gerade* $\mathfrak{c}$ *mit der Geraden durch die idealen Punkte* α *und* β *gemein hat.* Wir nehmen dann auf $\mathfrak{c}$ irgend zwei Punkte A und B an und bestimmen den eigentlichen oder idealen Schnittpunkt C der Geraden $A\beta$ und $B\alpha$. Nach willkürlicher Wahl des Punktes C_1 nehmen wir weiter den Punkt A_1 so auf $C_1\beta$ an, daß er auf der andern Seite von C_1C liegt wie A, so daß die Strecke $\overline{A_1A}$ einen Punkt G der Geraden C_1C enthält. Alsdann bestimmen nach dem 16. Satze die Geraden GB und $C_1\alpha$ einen eigentlichen oder idealen Punkt B_1 derart, daß $\mathfrak{c}_1 = A_1B_1$ den gesuchten Punkt γ mit $\mathfrak{c}$ bestimmt.

Soll endlich der *gemeinsame Punkt* γ *zweier idealen Geraden* AB *und* $\mathfrak{g}$ *konstruiert werden,* so bestimmen wir zuerst nach dem Vorigen die gemeinsamen Punkte β und α von $\mathfrak{g}$ mit den Geraden CA und CB durch irgendeinen eigentlichen Punkt C und nehmen nach beliebiger Annahme eines eigentlichen Punktes A_1 den Punkt G auf AA_1 so an, daß er auf der andern Seite der Geraden $A_1\beta$ liegt wie C. Enthält demnach die Strecke $\overline{GC}$ einen Punkt C_1 der Geraden $A_1\beta$, so bestimmen die Geraden GB und $C_1\alpha$ einen eigentlichen oder idealen Punkt B_1, der mit A_1 und dem gesuchten Punkte γ in einer eigentlichen Geraden liegt. So interessant dies Resultat ist, daß wir auf Grund des Desarguesschen Satzes alle Konstruktionen mit den idealen Elementen einer Ebene durch das Ziehen von eigentlichen Geraden der Ebene selbst ausführen können, so muß doch hervorgehoben werden, daß *der Desarguessche Satz selbst aus ebenen Postulaten allein, d. h. aus den sechs ersten Postulaten ohne das 7. Postulat, das auch Punkte außerhalb der Ebene fordert, nicht bewiesen werden kann.*

Wir beweisen dies durch Aufstellung einer ebenen Geometrie[1]), in der die sechs ersten Postulate gelten, aber im allgemeinen nicht

1) Vgl. Moulton, A simple non desarguesian Plane Geometry, Trans. Amer. Math. Soc. vol. III, 1902. Andre Beweise gaben Peano l. c. p. 73, Hilbert a. a. O. § 23.

der Desarguessche Satz. Wir betrachten hierbei als Punkte diejenigen einer gewöhnlichen euklidischen Ebene, einschließlich der Punkte der unendlich fernen Geraden, und beziehen sie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem. Auch als Geraden betrachten wir die gewöhnlichen Geraden, sofern ihre Parallele durch den Anfangspunkt im zweiten und vierten Quadranten liegt. Liegt hingegen diese Parallele im ersten und dritten Quadranten, so behalten wir den unterhalb der Abszissenachse gelegenen Teil der Geraden bei, den oberen Teil der Geraden aber ersetzen wir durch diejenige Halbgerade, welche aus ihm durch Halbierung der Ordinaten entsteht (Fig. 6). Auch dann bestimmen je zwei Punkte eine „Gerade". Liegen die beiden Punkte A, B unterhalb der Achse oder liegt die Parallele zur gewöhnlichen Geraden AB im zweiten und vierten Quadranten, so ist dies evident. Ist weder das eine noch das andre der Fall und liegen erstens A und B oberhalb der Achse, so besteht die Gerade aus dem Teile AB bis zur Achse und aus der Verlängerung der Geraden $A'B'$ unter die Achse, wenn A' und B' aus A und B durch Verdoppelung der Ordinaten entstehen; liegt zweitens A unterhalb, B oberhalb der Achse, so besteht der untere Teil der Geraden aus dem unteren Teile der Geraden AB' und der obere Teil aus der Verbindungslinie von B mit dem Spurpunkte von AB'. Ebenso erkennt man leicht, daß die übrigen Postulate der Ebene gelten, ja daß überhaupt je zwei „Geraden" einen eigentlichen oder unendlich fernen Punkt gemein haben.

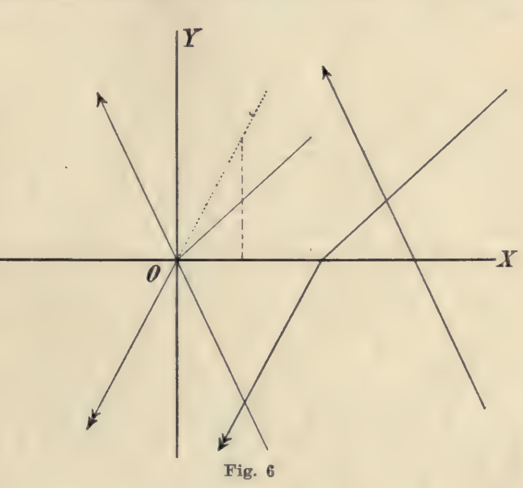


Fig. 6

Betrachtet man aber zwei unterhalb der Achse liegende, ähnliche und ähnlich gelegene, also im gewöhnlichen Sinne perspektive Dreiecke, deren Ähnlichkeitszentrum oberhalb der Achse liegt, so kann man es (Fig. 7) immer so einrichten, daß die drei Verbindungslinien entsprechender Ecken nicht alle ihre Parallelen durch den Anfangspunkt im zweiten und vierten Quadranten haben. Für solche Dreiecke gilt also in der Tat der Satz des Desargues *nicht*,

obwohl sich die entsprechenden Seiten auf der unendlich fernen Geraden schneiden.

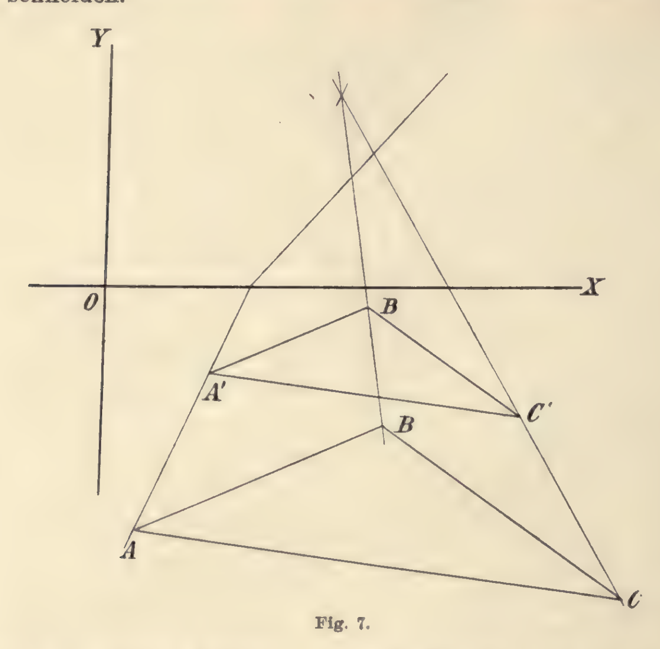


Fig. 7.

No. 8. Ideale Ebenen. Dieselbe Dualität, die wir durch Einführung der idealen Punkte und Geraden in der Ebene erreicht haben, können wir auch im Raume durch Einführung des Begriffes *einer idealen Ebene* erhalten, ja wir werden zu dieser Begriffsbildung gedrängt, soll anders auf dem von uns eingeschlagenen Wege ein Abschluß erzielt werden. Wir gelangen hierzu auf Grund des folgenden Satzes:

18. Satz. *Sind zwei Ebenen so aufeinander bezogen, daß je zwei Punkte einander entsprechen, die mit einem idealen Punkte auf je einem eigentlichen oder idealen Strahle liegen, so entsprechen je drei Punkten einer eigentlichen oder idealen Geraden wieder drei Punkte einer Geraden.*

Sind ε und ε' die beiden Ebenen und T das ideale Projektionszentrum, so ist der Satz nach dem 15. Satze evident, sobald die drei Punkte von ε in einer eigentlichen Geraden liegen. Falls aber die Gerade, auf der die drei idealen Punkte α, β, γ liegen, auch nur ideal sein kann, so suchen wir nach willkürlicher Annahme der Punkte A und B auf einer Geraden $\mathfrak{c}$ durch γ den eigentlichen oder idealen gemeinsamen Punkt C der beiden Geraden $A\beta$ und $B\alpha$

Wählen wir dann nach willkürlicher Annahme eines Punktes C_1 den Punkt A_1 auf der Geraden $C_1\beta$ so, daß er auf der andern Seite der Geraden C_1C liegt wie A, so enthält die Strecke $A\overline{A_1}$ einen Punkt G der Geraden CC_1 und die Geraden $C_1\alpha$ und $A_1\gamma$ haben einen eigentlichen oder idealen Punkt B_1 gemein, der nach dem Satze des Desargues mit B und G in einer Geraden liegt. Da nun die ganze Figur abgesehen von $\alpha\beta\gamma$ aus lauter eigentlichen Geraden besteht, so entsprechen den Dreiecken (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ in ε' jedenfalls zwei Dreiecke, die in bezug auf den dem Punkte G entsprechenden Punkt G' perspektiv liegen, es schneiden sich daher auch die homologen Seiten dieser beiden Dreiecke in drei Punkten α', β', γ', die in einer eigentlichen oder idealen Geraden liegen.

Wir können diesen Satz auch dahin aussprechen, daß der Ort der idealen Geraden, die ein idealer Punkt mit den Punkten einer idealen Ebene bestimmt, durch jede Ebene in einer eigentlichen oder idealen Geraden getroffen wird. Wir werden daher diesen Ort eine *ideale Ebene* nennen können. In der Tat muß jede ideale Gerade, die zwei ihrer Punkte enthält, ganz in ihr enthalten sein; denn nach der zweiten Form unsres Satzes schneidet irgendeine Ebene durch die beiden idealen Punkte die durch diese bestimmte Gerade aus dem Orte aus. Wir können daher unsern Satz auch so formulieren:

19. Satz. *Der Ort der Geraden, die einen idealen Punkt mit allen Punkten einer idealen Geraden verbinden, ist eine* ***ideale Ebene,*** *die jede ideale Gerade enthält, die zwei Punkte mit ihr gemein hat.*

Da jede ideale Gerade durch zwei Ebenen bestimmt wird und jede Ebene mit einer idealen Ebene eine eigentliche oder ideale Gerade gemein hat, so wird nach dem 15. Satze jede ideale Ebene von jeder idealen Geraden in einem eigentlichen oder idealen Punkte getroffen und nach dem 19. Satze, wenn die Gerade nicht in der Ebene enthalten ist, nur in einem Punkte. Hieraus geht hervor, daß je zwei ideale Ebenen eine eigentliche oder ideale Gerade gemein haben, die durch die Schnittpunkte irgend zweier idealer Geraden der einen Ebene mit der andern bestimmt ist. Daraus folgt endlich, daß je drei ideale Ebenen einen Punkt oder eine Gerade gemein haben, die natürlich auch nur ideal zu sein brauchen. Wir erhalten daher zum Schlusse den Satz:

20. Satz. *Je zwei ideale Ebenen haben eine eigentliche oder ideale Gerade gemein und je drei ideale Ebenen einen Punkt oder eine Gerade, die auch nur ideal sein können.*

Wir haben nunmehr durch Einführung der idealen Elemente den Grundlagen der projektiven Geometrie denselben allgemeinen Charakter geben können, wie dies sonst bei Voraussetzung des Parallelenaxioms durch Hinzunahme der sogenannten unendlich fernen Elemente geschieht. Unsre Grundlagen sind aber viel allgemeinerer Natur, insofern wir über *das Schneiden von Geraden einer Ebene* keine andern Voraussetzungen gemacht haben als die im 6. Postulate ausgesprochenen, die sich durchaus auf die Punkte eines Dreiecks, also eines begrenzten Bereichs beschränken. Unsre Entwickelungen können daher auch zur Grundlage jeder der nichteuklidischen Geometrien dienen, die sich voneinander und von der euklidischen Geometrie durch das verschiedene Verhalten zweier Geraden in der unbegrenzten Ebene unterscheiden.

Auf die Möglichkeit dieser Einführung der idealen Elemente ohne solche besondere Voraussetzungen und damit im besonderen auf die Unabhängigkeit der projektiven Geometrie vom Parallelenaxiom hat zuerst F. Klein[1]) hingewiesen. Wenn er aber auch alle zur Durchführung seines Gedankens nötigen Elemente angegeben hat, so war doch vieles nur angedeutet, und es bedurfte zur wirklichen Ausführung noch der ausgezeichneten Untersuchung von Pasch[2]). Im besonderen ist es das Verdienst von Pasch gezeigt zu haben, daß die Einführung der idealen Elemente unabhängig ist von dem sogenannten Fundamentalsatze der projektiven Geometrie (s. § 4), ein Resultat, dessen Tragweite erst durch die späteren Untersuchungen von Hilbert (s. § 8) ganz gewürdigt werden konnte.

Schließlich mag nochmals darauf hingewiesen werden, daß bei Einführung eines idealen Punktes z. B. nichts darüber postuliert wird, daß die ihn bestimmenden Geraden wirklich keinen Punkt im gewöhnlichen Sinne des Wortes gemein haben, die Einführung geschieht vielmehr nur in der Absicht, um die Entscheidung über diese Frage hinauszuschieben. Diese Bemerkung ist wichtig, um es als gerechtfertigt erscheinen zu lassen, daß wir von idealen Geraden

1) F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 6, S. 132.

2) Pasch, a. a. O. S. 33—64, auch: Über die uneigentlichen Geraden u. Ebenen, Math. Ann. Bd 32, S. 158 und Schur, Über die Einführung der sog. idealen Elemente in die proj. Geometrie, ib. Bd. 39, S. 113, ferner Bonola, Sulla introduzione degli enti impropri in geometria proj , Giorn. di Mat., vol. 38, p. 105.

einer Ebene handelten, obwohl es vielleicht nur eine oder gar keine ideale Gerade gibt, die wir nicht zugleich als eine eigentliche betrachteteten.

No. 9. Zentrale Kollineation. Kollineare Spiegelung. Harmonische Punkte. Der Desarguessche Satz erlaubt uns eine einfache Abbildung der Ebene auf sie selbst herzustellen, bei der jedem Punkte ein und nur ein Punkt entspricht und drei Punkten einer Geraden wieder drei Punkte einer Geraden. Liegen nämlich die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in bezug auf das Zentrum S und die Achse e perspektiv, so wird hiernach, wenn S, e und das Bild A' von A gegeben sind, zu jedem Punkte B das Bild B' unmittelbar gefunden werden können als Schnittpunkt von SB mit $\gamma A'$ (s. Fig. 8). Zugleich lehrt der Desarguessche Satz, daß, falls das Bild C' von C ebenso gefunden ist, es sich auch ergeben würde als Schnittpunkt von SC mit $\alpha B'$. Was aber das Bild D' eines Punktes D von SA betrifft, so kann es mit Hilfe des Bildes B' von B gefunden werden, und der Desarguessche Satz lehrt wiederum, daß das Bild C' von C denselben Punkt D' ergibt. Wir erhalten so das Resultat:

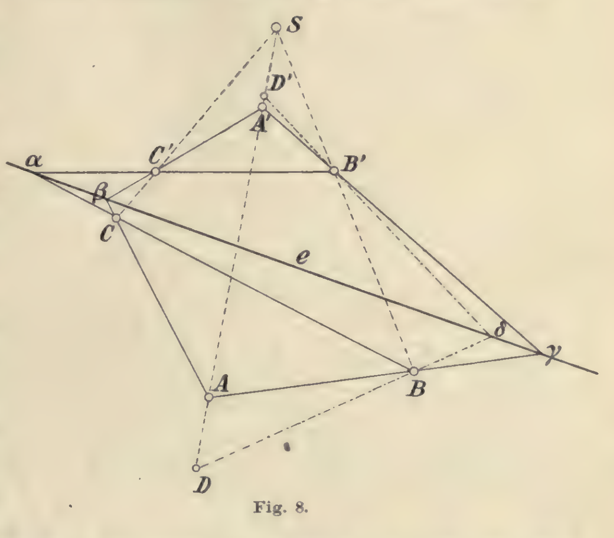


Fig. 8.

21. Satz. *Durch ein Zentrum S, eine Achse e und das Bild A' eines Punktes A, das mit S in gerader Linie liegt, ist eine solche Abbildung der Ebene auf sie selbst oder* ***eine zentrale Kollineation*** *bestimmt, bei der jedem Punkte ein mit ihm und S in gerader Linie liegender Punkt entspricht und drei Punkten einer Geraden wieder drei Punkte einer Geraden, die sich mit dem Originale auf der Achse e schneidet.*

Bei dieser Abbildung haben wir uns die Ebene doppelt zu denken, insofern mit jedem Punkte A ein Bildpunkt D' zusammenfällt, dessen Original D im allgemeinen von A' verschieden sein

wird. Fällt aber D mit A' zusammen, so ist leicht zu sehen, daß das Entsprechende für den mit irgendeinem Punkte B zusammenfallenden Bildpunkt E' eintreten muß. Da sich nämlich der Voraussetzung gemäß BD und $B'D'$ in einem Punkte δ von e schneiden müssen, so ist auch $E'A' = BD$ das Bild von $EA = B'D'$ (s. Fig. 9).

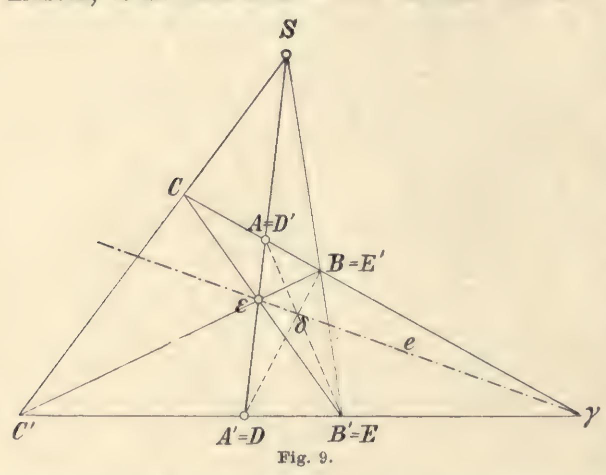


Fig. 9.

Zugleich sieht man, daß nach Annahme der Punkte S, A, A' von der Achse e nur noch ein Punkt, etwa γ willkürlich angenommen werden kann. Denn sind B und B' irgend zwei mit S in gerader Linie liegende Punkte von $A\gamma$ und $A'\gamma$, so ist $\delta = (AB', BA')$ ein zweiter Punkt der Achse, und es schneidet $\delta\gamma$ die SA in einem Punkte ε, der von der Wahl der γ und B (auf $A\gamma$) unabhängig ist. Ist nämlich γ_1 irgendein anderer Punkt der Ebene und B_1 irgendein Punkt auf $A\gamma_1$, $B_1' = (SB_1, A'\gamma_1)$ und $\delta_1 = (AB_1', B_1A')$, so entsprechen sich die Dreiecke $BB'\gamma$ und $B_1B_1'\gamma_1$ in einer zentralen Kollineation mit der Achse SAA'. Da nun in dieser dem Punkte δ der Punkt δ_1 entspricht, so schneiden sich auch $\gamma\delta$ und $\gamma_1\delta_1$ in ε auf dieser Achse.

Der so gefundene Punkt ε heißt *der vierte harmonische Punkt von ε in bezug auf A und A'.* S und ε sind offenbar die Schnittpunkte der beiden Diagonalen des Vierecks $BB'\gamma\delta$ mit der Verbindungslinie der Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten, A und A'. In unserer Konstruktion sind daher A und A' einerseits und S und ε andrerseits miteinander vertauschbar. Es ist aber auch leicht zu sehen, daß die beiden Paare untereinander vertauschbar sind. Bezeichnen wir nämlich die Punkte $(AB, \varepsilon B')$ und $(A'B', \varepsilon B)$ mit C und C', so liegen die Dreiecke ACB' und $A'C'B$ in bezug auf die Achse e perspektiv, CC' geht also durch S. Es sind daher S und ε die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten des Vierecks $BB'CC'$ sowie A und A' die Schnittpunkte von $S\varepsilon$ mit der Diagonale dieses Vierecks. Demnach ist

auch A' der vierte harmonische Punkt von A in bezug auf S und ε. In unserer besonderen Kollineation, die wir *kollineare Spiegelung* nennen wollen, entspricht also jedem Punkte A der vierte harmonische Punkt in bezug auf das Zentrum S und den Schnittpunkt von SA mit der Achse.

Schließlich können wir noch sehen, daß, falls A und A' eigentliche Punkte sind und ε auf der Strecke $\overline{AA'}$ liegt, der vierte harmonische Punkt S keinenfalls dieser Strecke angehören darf. Denn nehmen wir zur Konstruktion von S den Punkt δ auf $\overline{\varepsilon\gamma}$ an, so liegen B resp. B' auf $\overline{A\gamma}$ resp. $\overline{A'\gamma}$ und δ auf $\overline{AB'}$ und $\overline{BA'}$, daher befinden sich A und A' auf derselben Seite der Geraden BB', so daß in der Tat die Strecke $\overline{AA'}$ den Punkt S nicht enthalten kann; ob freilich S überhaupt ein eigentlicher Punkt ist, darüber läßt sich im allgemeinen nichts aussagen. Alles in allem erhalten wir die Sätze:

22. Satz. *Jedem Punkte C einer Geraden AB entspricht in bezug auf die Punkte A und B eindeutig ein vierter* ***harmonischer Punkt*** *D so zwar, daß A und B die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegender Seiten eines Vierecks sind, dessen Diagonalen durch C und D gehen; dann ist auch umgekehrt B der vierte harmonische Punkt von A in bezug auf C und D. Sind A, B, C eigentliche Punkte und liegt C auf der Strecke* $\overline{AB}$, *so kann D dieser Strecke nicht angehören.*

23. Satz. *Entspricht in einer zentralen Kollineation mit dem Zentrum S und der Achse e irgend einem Punkte A der Punkt A′ auch insofern, als man A als Bildpunkt betrachtet, so tritt dasselbe für jedes Paar entsprechender Punkte ein, und die Achse schneidet den Strahl SAA′ in dem vierten harmonischen Punkt von S in bezug auf A und A′. Eine solche Kollineation heißt eine* ***kollineare Spiegelung*** *in bezug auf das Zentrum S und die Achse e.*

Der Begriff der kollinearen Spiegelung einer Ebene läßt sich leicht auf den *Raum* ausdehnen, indem *man nach Festlegung des Zentrums S und der Kollineationsebene $\mathfrak{E}$ jedem Punkt A seinen vierten harmonischen in bezug auf S und den Schnittpunkt von SA mit $\mathfrak{E}$ zuordnet.* Dann folgt aus dem 23. Satze, daß jeder Geraden wieder eine Gerade entspricht, die sich mit ihr auf $\mathfrak{E}$ schneidet, und folglich auch jeder Ebene eine ebensolche Ebene.

§ 3.

Die Postulate der Bewegung und der Satz des Pascal.

No. 10. Postulate der Bewegung. Die Beziehungen der geometrischen Elemente, des Punktes, der Geraden und der Ebene, sind durch Verbinden und Projizieren, worin gewissermaßen die optischen Eigenschaften des Raumes ihren Ausdruck finden, nicht erschöpft. Vielmehr sind diese Beziehungen durch die Gesetze der ohne gestaltliche Änderung möglichen Beweglichkeit der Figuren, wodurch die äußeren Objekte fühlbar auf uns wirken, zu vervollständigen. Diese Gesetze finden in den folgenden Postulaten den einfachsten Ausdruck:

9. Postulat. *Es gibt eine solche Zuordnung zweier Figuren, durch welche jeder Strecke und jedem in ihr gelegenen Punkte der einen Figur eine Strecke und ein ihr angehöriger Punkt der andern Figur umgekehrt eindeutig entspricht. Diese Zuordnung, sowie ihre Umkehrung heißt* ***Bewegung.***

10. Postulat. *Die Aufeinanderfolge zweier Bewegungen ist wieder eine Bewegung.*

Aus diesen beiden Postulaten ergeben sich nun schon zwei Folgerungen, nämlich:

24. Satz. *Durch eine Bewegung geht jede ebene Figur in eine ebensolche über.*

25. Satz. *Auch die Identität, die jedem Punkte ihn selbst zuordnet, ist eine Bewegung.*

Nun bedürfen wir eines weiteren Postulates, das die Bestimmtheit einer Bewegung kennzeichnet. Zuvor aber stellen wir die Definitionen auf:

4. Definition. *Diejenigen Punkte C einer Geraden AB, für welche entweder C auf $\overline{AB}$ oder B auf $\overline{AC}$ liegt, heißen derselben* ***Seite*** *oder* ***Halbgeraden*** *angehörig, die übrigen Punkte der Geraden bilden dann deren* ***Komplement.***

5. Definition. *Je zwei Punkte einer Ebene ABC liegen auf derselben* **Seite** *oder* **Halbebene** $(AB)C$, *wenn sie demselben der beiden Teile angehören, in die AB nach dem 8. Satze die Ebene teilt.*

Nunmehr lautet neues Postulat:

11. Postulat. *Sind gegeben zwei Ebenen α und α', zwei Geraden a in α und a' in α' sowie zwei Punkte A in a und A' in a', so gibt es eine und nur eine Bewegung, die A in A', eine bestimmte Seite von a in eine solche von a' und eine bestimmte Seite von α in eine solche von α' überführt.*

No. 11. Umwendung. Senkrechte Geraden. Absoluter Pol und absolute Polare. Wir wollen uns nun zunächst auf *die Bewegungen ebener Figuren innerhalb ihrer Ebene* beschränken, die letzten drei Postulate also nur als für eine Ebene gültig ansehen und diejenige Bewegung $\mathfrak{U}$ betrachten, welche einen Punkt A sowie eine und folglich auch die andre Seite einer A enthaltenden Geraden a unverändert läßt, hingegen die eine Seite der Ebene in die andre verwandelt, also beide Seiten miteinander vertauscht. Hieraus geht hervor, daß durch die zweimalige Anwendung dieser Bewegung $\mathfrak{U}$ eine solche entsteht, die ebenso bestimmt ist wie die Identität, also nach dem 11. Postulate und dem 25. Satze die Identität sein muß. Ordnet also die Bewegung $\mathfrak{U}$ einem Punkte B den Punkt B' zu, so verwandelt sie auch B' in B. Ist daher B ein Punkt von a, so muß B' mit ihm zusammenfallen. Denn würde B' etwa ein von B verschiedener Punkt der Strecke $\overline{AB}$ sein, so wäre hiernach und nach dem 9. Postulate auch B ein Punkt der Strecke AB', was durch den 1. Satz ausgeschlossen ist. Schneidet daher eine Gerade die Strecke $\overline{AB}$ in C, so geht auch die entsprechende Gerade durch C. Daraus folgt, daß $\mathfrak{U}$ *eine kollineare Spiegelung ist.* Ist nämlich P' das Bild von P, so schneiden sich zunächst die Verbindungslinien der Eckpunkte des Dreiecks (ABP) mit ihren Bildern in demselben Punkte $\mathfrak{a}$. Denn sind Q und R irgendwelche Punkte von $\overline{AP}$ resp. $\overline{BP}$, so haben die Strecken $\overline{AR}$ und $\overline{BQ}$ einen Punkt S so gemein, daß $\overrightarrow{PS}$ einen Punkt C von $\overline{AB}$ enthält. Folglich gehen nach dem Desarguesschen Satze die Strahlen PP', QQ', RR', SS' durch denselben Punkt $\mathfrak{a}$. Durch $\mathfrak{a}$ geht daher auch TT', wenn T irgend ein Punkt der Ebene ist, weil entweder $\overline{AT}$ oder $\overline{BT}$ Punkte des Dreiecks (ABP) enthalten muß. Nach dem Desarguesschen Satze müssen also umgekehrt zwei entsprechende Geraden einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt von a gemein haben. Wir nennen den Punkt $\mathfrak{a}$,

der eigentlich oder uneigentlich sein kann, den *absoluten Pol* von a und die Bewegung $\mathfrak{U}$ die *Umwendung um die Achse* a.

Durch die Umwendung $\mathfrak{U}$ werden offenbar die beiden Seiten der Geraden $A\mathfrak{a} = AC$ miteinander vertauscht, während jeder andre Punkt D in einen auf derselben Seite von AC gelegenen Punkt D' verwandelt wird (Fig. 10). Denn liegen C und D auf derselben Seite von a, so haben die Strecken $\overline{CD'}$ und $\overline{C'D}$ einen Punkt E von a gemein, D und D' liegen aber mit E auf derselben Seite von AC. Deshalb vertauscht auch die Umwendung $\mathfrak{V}$ um die Achse AC die beiden Seiten der Geraden $a = AB$. Denn diejenige Bewegung $\mathfrak{W} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}$, welche durch die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ entsteht, läßt A stehen und vertauscht die beiden Seiten von AC sowie nach dem obigen die beiden Teile, in die AC die Ebene zerlegt. Die zweimalige Anwendung der Bewegung $\mathfrak{W}$ ergibt daher wiederum die Identität, und $\mathfrak{W}$ selbst verwandelt jeden Punkt D in einen Punkt D'', der auf der Verlängerung $\overrightarrow{DA}$ liegt. Da nämlich $\mathfrak{W}$ die Strecken $\overline{CC''} = \overline{CC'}$ und $\overline{C'C}$ einerseits und die Strecken $\overline{DD''}$ und $\overline{D''D}$ andrerseits vertauscht und D und D'' auf verschiedenen Seiten von CC' liegen, so enthält die Strecke $\overline{DD''}$ einen Punkt der Geraden CC', der, weil er sich selbst entsprechen muß, von A nicht verschieden sein kann. Demnach wird auch jeder Punkt B von a durch $\mathfrak{W}$, also, weil $\mathfrak{U}$ den Punkt B stehen läßt, auch durch $\mathfrak{V}$ in einen Punkt der Verlängerung $\overrightarrow{BA}$ verwandelt, wie zu beweisen war.

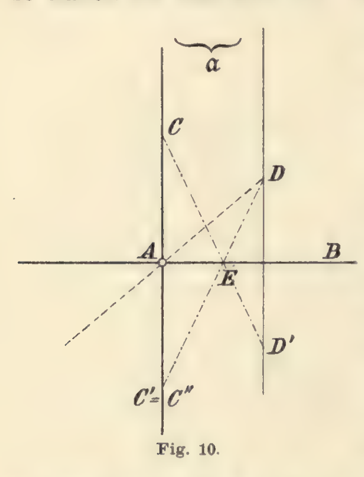


Fig. 10.

Zwei solche Geraden, welche wie AB und AC in der Beziehung zueinander stehen, daß eine Umwendung um die eine die beiden Seiten der andern miteinander vertauscht, heißen *senkrecht* aufeinander oder: $AB \perp AC$. Die Bewegung $\mathfrak{W}$, die durch die Aufeinanderfolge dieser beiden Umwendungen entsteht, ist offenbar ebenfalls eine kollineare Spiegelung an dem Zentrum A und einer Achse, die wir *die absolute Polare* von A nennen können. Diese Achse enthält in der Tat gemäß der Entstehung von $\mathfrak{W}$ sicher die absoluten Pole von AB und AC. Da aber $\mathfrak{W}$ auch in Beziehung auf

jede Gerade AD so definiert ist wie oben in bezug auf AC, so entsteht $\mathfrak{W}$ auch durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen an AD und der darauf senkrechten Geraden, so daß die Achse von $\mathfrak{W}$ auch den absoluten Pol von AD enthält.

Zwei aufeinander senkrechte Geraden AB und AC gehen offenbar durch jede Bewegung $\mathfrak{B}$ wieder in zwei senkrechte Geraden A_1B_1 und A_1C_1 über. Ist nämlich $\bar{\mathfrak{B}}$ die Umkehrung der Bewegung $\mathfrak{B}$, so läßt diejenige Bewegung, welche durch die Aufeinanderfolge der Bewegungen $\bar{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ entsteht, den Punkt A_1 und den Strahl A_1B_1 stehen und vertauscht die beiden Seiten der Geraden A_1B_1, so daß in der Tat $A_1B_1 \perp A_1C_1$. Wir können diese Folgerungen in den Satz zusammenfassen:

26. Satz. *Diejenige Bewegung $\mathfrak{U}$, welche einen Punkt A stehen läßt und jeder Seite der Geraden AB diese selbst zuordnet, der einen Seite der Ebene aber die andrerseits von AB gelegene, läßt jeden Punkt von AB unverändert und ist eine kollineare Spiegelung an der Achse AB und einem eigentlichen oder uneigentlichen Zentrum, dem* **absoluten Pole** *von AB; sie wird* **Umwendung** *um die Achse AB genannt. Diese Umwendung vertauscht die beiden Seiten der auf AB* **senkrechten** *Geraden AC, d. h. der Verbindungslinie von A mit dem absoluten Pole von AB, ebenso wie die Umwendung $\mathfrak{B}$ um die Achse AC die beiden Seiten der Geraden AB vertauscht, so daß auch AB zu AC senkrecht ist. Die durch die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ entstehende Bewegung $\mathfrak{W}$ ist eine kollineare Spiegelung an dem Zentrum A und der* **absoluten Polare** *von A, d. h. dem Orte der absoluten Pole aller Geraden durch A. Zwei aufeinander senkrechte Geraden gehen durch jede Bewegung in ebensolche über.*

No. 12. Konstruktion von senkrechten Geraden. Umkehrung des Winkels. Wir haben in unsern Postulaten gemäß ihrer Entstehung aus der Abstraktion von Erfahrungen an starren Körpern die Bewegung als Abbildung der Ebene (resp. des Raumes) aufgefaßt, ohne uns um die Verwirklichung der dadurch geforderten Zuordnung von Figuren durch Konstruktion mit den üblichen Hilfsmitteln der Zeichnung zu kümmern. Die Wichtigkeit einer solchen Untersuchung liegt aber auf der Hand, sollen sich anders unsre Sätze in den gewohnten Rahmen einordnen lassen. Da wird nun vor allem *die Konstruktion von senkrechten Geraden* auszuführen sein. Als hierzu dienliches Hilfsmittel wählen wir, um vorerst neue Postulate zu vermeiden, den sogenannten *Streckenübertrager.* Nennen wir nämlich zwei Strecken *kongruent,* wenn die eine in die andre durch

eine Bewegung übergeführt werden kann, so ist, sobald wir uns wie bisher auf die Bewegungen innerhalb einer und derselben Ebene beschränken, leicht zu sehen, daß es zu jeder Strecke $\overline{AB}$ auf jeder Seite einer den Punkt A_1 enthaltenden Geraden a_1 eine und nur eine kongruente Strecke $\overline{A_1 B_1}$ gibt. Denn sind $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ die beiden Bewegungen, die nach dem 11. Postulate je eine solche Kongruenz vermitteln, so ist die durch die Aufeinanderfolge der beiden Bewegungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ entstehende Bewegung die Umwendung um die Achse a_1, bei der jeder Punkt von a_1 stehen bleibt, so daß in der Tat $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ jedem Punkte von AB denselben Punkt auf a_1 zuordnen (wegen des entsprechenden Satzes im Raume s. Nr. 14).

Wir wollen nun annehmen, daß wir den Punkt B_1 mit Hilfe des Streckenübertragers, also etwa mit Hilfe eines Zirkels finden können. Hierbei ist aber darauf zu achten, daß der Zirkel nur dazu dienen soll, um den von ihm gefaßten Radius auf einer Geraden von einem ihrer Punkte aus nach beiden Seiten aufzutragen, nicht aber um einen Kreis mit diesem Radius durch eine den Mittelpunkt nicht enthaltende Gerade zu schneiden. Die Lösbarkeit dieser Aufgabe bedarf vielmehr eines neuen Postulats, von dem wir später handeln werden (§ 5).

Was nun die Konstruktion von senkrechten Geraden betrifft, so können wir mit Hilfe des Streckenübertragers und des Lineals die absolute Polare jedes Punktes A finden. Denn entsprechen sich B und B_1 in der oben beschriebenen Bewegung $\mathfrak{W}$, so sind $\overline{AB}$ und $\overline{AB_1}$ zwei kongruente Strecken derselben Geraden. Tragen wir daher auf irgend einer andern Geraden durch A die kongruenten Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{AC_1}$ ab, so bestimmen die Geraden BC und $B_1 C_1$ einerseits und BC_1 und $B_1 C$ andrerseits je einen Punkt der absoluten Polare von A. Diese ist also als ideale Gerade in dem in § 2 auseinandergesetzten Sinne bestimmt und ihr gemeinsamer Punkt $\mathfrak{a}$ mit der absoluten Polare irgend eines andern Punktes B kann nach dem dort entwickelten Verfahren mit Hilfe des Lineals konstruiert werden. Sobald aber der absolute Pol von AB bekannt ist, kann durch jeden Punkt D die Senkrechte zu AB mit Hilfe des Lineals gefunden werden.

Diese Lösung versagt nur dann, wenn die absoluten Polaren von A und B, also, wie leicht zu sehen ist, die aller Punkte der Ebene zusammenfallen. Um eine Lösung zu geben, die auch in diesem Falle nicht versagt, bedürfen wir eines neuen Postulats, das auch sonst für die späteren Untersuchungen unentbehrlich ist, nämlich:

12. Postulat. *Die Bewegung, die einen Punkt A stehen läßt, die Halbgerade AB in AC und die Halbebene $(AB)C$ in $(AC)B$ überführt, verwandelt auch AC in AB. (Umkehrung des Winkels.)*

Das Postulat besagt offenbar, daß je zwei Halbgeraden AB und AC durch eine und nur eine Umwendung vertauscht werden können. *Ist $AB \perp AC$, so läßt sich dies Postulat beweisen* Weil nämlich bei jeder Bewegung Senkrechte wieder in Senkrechte übergehen, so verwandelt diejenige Bewegung $\mathfrak{D}$, welche AB in AC und die C abgewandte Seite der Ebene in die B enthaltende überführt, auch $A\mathfrak{B}$ in $A\mathfrak{C}$ und $A\mathfrak{C}$ in AB, wenn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ auf $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{CA}$ liegen. Verbindet man also die Bewegung $\mathfrak{D}$ mit der Umwendung $\mathfrak{U}$ um AC, so führt in der Tat die Bewegung $\mathfrak{U}\mathfrak{D}$ $A\mathfrak{B}$ in $A\mathfrak{C}$ und $A\mathfrak{C}$ in $A\mathfrak{B}$ über, ist also eine Umwendung der beiden Senkrechten.

Die Achse dieser Umwendung findet man mit Hilfe des Streckenübertragers und des Lineals, indem man auf AB resp. AC eine zu $\overline{AC}$ resp. $\overline{AB}$ kongruente Strecke $\overline{AC'}$ resp. $\overline{AB'}$ abträgt; dann haben die Strecken BC und $B'C'$ einen Punkt D der Achse gemein (Fig. 11). Trifft diese Achse $\overline{BB'}$ in E und tragen wir ebenso auf AB resp. AE die zu $\overline{AE}$ resp. $\overline{AB}$ kongruenten Strecken $\overline{AE_1}$ resp. $\overline{AB_1}$ ab, so ist E_1B_1 eine Senkrechte zu AE_1.[1]) Nachdem diese Fundamentalaufgabe gelöst ist, ist es leicht zu sehen, wie in jedem Punkte B die Senkrechte zu AB und folglich auch zu jedem Punkte dieser Senkrechten mit unsern Hilfsmitteln derjenige Punkt konstruiert werden kann, welcher ihm in

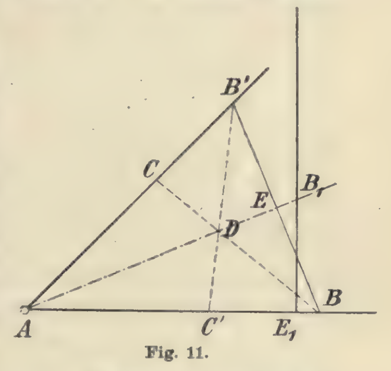


Fig. 11.

einer Bewegung zugeordnet ist, wie sie im 11. Postulate beschrieben wurde. Die Ausführung glauben wir dem Leser überlassen zu können.

No. 13. Drehung. Aufeinanderfolge von drei Umwendungen. Satz des Pascal. Aus dem 12. Postulate ergibt sich zugleich ein für den Aufbau der allgemeinen Geometrie sehr wichtiger Satz über die Umwendungen um alle Achsen durch einen festen Punkt A. Hiernach ist nämlich jede Bewegung, die eine Halbgerade AB in die Halbgerade AC überführt, entweder die dort definierte Umwendung oder entstanden durch die Aufeinanderfolge dieser Um-

1) Vgl. hiermit die von Hilbert in § 36 der Grundlagen gegebene Konstruktion, die das Parallelenaxiom als ganz wesentlich voraussetzt.

wendung und der Umwendung um die Achse AC. Eine solche Bewegung, die durch die Aufeinanderfolge *zweier* Umwendungen entstanden ist, kann aber niemals wieder eine Umwendung um eine Achse der Ebene sein. Denn wäre D ein Punkt dieser Achse, so ginge AD durch die erste Umwendung in AE über und AE durch die zweite Umwendung wieder in AD, d. h. beide Umwendungen wären mit der nach unserm Postulate vollständig bestimmten Umwendung identisch, die AD in AE überführt, die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen ergäbe also die Identität.

Ist dies nicht der Fall, so wollen wir die durch die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen entstandene Bewegung eine *Drehung* $\mathfrak{D}$ um A nennen. Es ist nun leicht zu sehen, daß sie auf mannigfaltige Weise durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen dargestellt werden kann so zwar, daß die Achse der einen dieser Umwendungen eine beliebige Gerade durch A ist. Führt nämlich eine solche Umwendung AB in AD über, während AB durch die Drehung in AC übergeht, so entsteht die Drehung durch die Aufeinanderfolge der beliebigen Umwendung und der Umwendung, die AB in AC überführt. Denn da diese Bewegung keine Umwendung sein kann, so ist sie mit der Drehung, die AB in AC überführt, also mit der gegebenen Drehung identisch. Da hiernach die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen an Achsen durch A durch die Aufeinanderfolge zweier anderer Umwendungen an Achsen durch A, von denen die eine noch beliebig ist, ersetzt werden kann, so entsteht durch die Aufeinanderfolge von irgend *drei* Umwendungen an Achsen durch A wieder eine Umwendung. Wir erhalten daher den Satz:

27. Satz. *Die Aufeinanderfolge dreier Umwendungen um drei Achsen durch denselben Punkt A kann ersetzt werden durch eine einzige Umwendung um eine Achse durch denselben Punkt A.*

Mit Hilfe dieses Systems von Umwendungen können wir ein System von kollinearen Spiegelungen des Raumes herstellen, das die entsprechende Eigenschaft besitzt. Wir betrachten nämlich die kollinearen Spiegelungen $\mathfrak{S}$ in bezug auf die Ebenen $\mathfrak{E}$ durch die den Punkt A enthaltenden Achsen a unserer Ebene α und eine feste Gerade e durch A, die nicht in α liegt, als Kollineationsebenen und den jedesmaligen absoluten Pol $\mathfrak{a}$ von a als Zentrum. Dann entsteht durch die Aufeinanderfolge dreier solcher Spiegelungen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ jedenfalls eine Transformation $\mathfrak{T}$, bei der jedem Punkte und jeder Geraden durch ihn wieder ein Punkt und eine Gerade durch ihn entspricht, und es entsprechen sich selbst die Punkte von e

und a, wenn a die Achse derjenigen Umwendung ist, welche durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen an den drei Achsen a_1, a_2, a_2 entsteht, sowie der absolute Pol $\mathfrak{a}$ von a. Es entspricht daher auch jeder Punkt der Ebene $\mathfrak{E} = [a, e]$ sich selbst, und jedem Punkt der Ebene α und folglich auch der Ebene $[\mathfrak{a}, e]$ ist derselbe Punkt zugeordnet wie durch die kollineare Spiegelung $\mathfrak{S}$ in bezug auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{a}$. Hieraus folgt leicht, daß die Transformation $\mathfrak{T}$ mit der kollinearen Spiegelung $\mathfrak{S}$ identisch ist, und wir erhalten den Hilfssatz:

28. Satz. *Die Aufeinanderfolge von drei kollinearen Spiegelungen in bezug auf drei Ebenen durch drei den Punkt A enthaltende Geraden der Ebene α und eine feste durch A laufende und nicht in α enthaltene Gerade e als Kollineationsebenen und den jedesmaligen absoluten Polen der Spuren dieser Ebenen in α als Zentren kann durch eben eine solche kollineare Spiegelung ersetzt werden.*

Hieraus ergibt sich der folgende wichtige Satz über den Zusammenhang der Geraden des Raumes:

29. Satz. *Durch die Punkte irgend zweier Geraden g und g' derselben Ebene können zwei Scharen von Geraden $g_1', g_2', \ldots$ und $g_1, g_2, \ldots$ so gelegt werden, daß zwei Geraden verschiedener Scharen stets derselben Ebene angehören, zwei Geraden derselben Schar hingegen nicht.*

Nehmen wir nämlich zuerst an, daß g und g' mit der Ebene α den eigentlichen Punkt B und nur diesen gemein haben, so errichten wir in B die Senkrechte $AB = a$ auf der Schnittlinie von α mit der Ebene $[g, g']$. Ist dann e irgend eine Gerade durch A innerhalb der Ebene durch A und die Achse derjenigen kollinearen Spiegelung mit dem Zentrum $\mathfrak{a}$, dem absoluten Pole von a, welche g und g' vertauscht, so vertauscht auch die räumliche kollineare Spiegelung $\mathfrak{S}$ mit dem Zentrum $\mathfrak{a}$ und der Kollineationsebene $[e, a]$ die Geraden g und g', und die Geraden g_i' resp. g_i entstehen aus g resp. g' durch die kollinearen Spiegelungen $\mathfrak{S}_i$ an den Ebenen durch e und den absoluten Polen der Spuren dieser Ebenen in α. Denn dann ist $g_i' = \mathfrak{S}_i(g) = \mathfrak{S}_i\mathfrak{S}(g') = \mathfrak{S}_i\mathfrak{S}\mathfrak{S}_k(g_k)$ oder nach dem 29. Satze $g_i' = \mathfrak{S}'(g_k)$, d. h. g_i' und g_k haben einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt der Kollineationsebene der Spiegelung $\mathfrak{S}'$ gemein, durch die die Aufeinanderfolge der drei Spiegelungen $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_i$ ersetzt werden kann.

Da die Geraden g_i resp. g_i' in den Ebenen $\mathfrak{a}_i g'$ resp. $\mathfrak{a}_i g$ liegen, so ist leicht zu sehen, daß zwei Geraden derselben Schar nur dann in derselben Ebene liegen könnten, wenn B auf der absoluten Polare von A läge. Das kann aber, wenn es nicht schon an sich ausgeschlossen wäre, worauf wir an dieser Stelle noch nicht ein-

gehen wollen, durch geeignete Wahl von A auf a stets vermieden werden.

Haben nun die Geraden h und h' nicht einen eigentlichen Punkt B der Ebene α, sondern irgendeinen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt C gemein, so legen wir durch B irgend zwei Geraden g und g', die mit h resp. h' in derselben Ebene liegen, und g und g' können außerhalb der Ebene α angenommen werden, wenn dasselbe von h und h' gilt. Nunmehr verwandelt die kollineare Spiegelung mit irgend einem Zentrum S auf BC und einer Kollineationsebene durch die Punkte (g, h), (g', h') und den vierten harmonischen Punkt von S in bezug auf B und C, die Geraden g und g' in h und h' sowie die beiden Scharen von Geraden g_i' und g_i in zwei Scharen h_i' und h_i mit denselben Eigenschaften. Läge eine von den beiden Geraden h und h' oder lägen auch beide in der Ebene α, so kann man sie zuerst durch eine kollineare Spiegelung in zwei Geraden k und k' verwandeln, die nicht in α liegen, und diese dann durch die eben beschriebene kollineare Spiegelung in die zwei Geraden g und g' durch B, so daß unser Satz in jedem Falle bewiesen ist.

Man wolle noch bemerken, daß man die Geraden g_i' resp. g_i so legen kann, daß sie durch gegebene Punkte von g resp. g' gehen, wofür die Kollineationsebene von $\mathfrak{S}_i$ nur durch den betreffenden Punkt gelegt zu werden braucht. Diese Bemerkung ist wichtig für den Beweis des sogenannten Pascalschen Satzes für zwei Geraden. Er lautet:

30. Satz. *Liegen die Ecken E_1, E_2', E_3, E_4', E_5, E_6' eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden g und g' derselben Ebene, so liegen die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks, d. h. die Punkte:*

$$D_1 = (E_1E_2', E_4'E_5),\ D_2 = (E_2'E_3, E_5E_6'),\ D_3 = (E_3E_4', E_6'E_1)$$

in einer geraden Linie ***(Satz des Pascal)***. (Fig. 12.)

Denken wir uns nämlich nach dem eben auseinandergesetzten Verfahren durch die Ecken des Sechsecks die Geraden g_1', g_2, g_3', g_4, g_5', g_6 gelegt, so liegen die Punkte D_1, D_2, D_3 der Reihe nach in den Schnitlinien der Ebenen $[g_1', g_2]$ und $[g_4, g_5']$, $[g_2, g_3']$ und $[g_5', g_6]$, $[g_3', g_4]$ und $[g_6, g_1']$. Setzen wir daher $(g_3', g_6) = F_1$, $(g_1', g_4) = F_2$, $(g_2, g_3') = F_3$, so liegen D_1, D_2, D_3 auch der Reihe nach in den Geraden F_2F_3, F_3F_1, F_1F_2, die mit den obigen Schnittlinien identisch sind. Da aber die Punkte F_1, F_2, F_3 nach dem 29. Satze nicht in der Ebene $[g, g']$ liegen dürfen, so liegen die Punkte D_1, D_2, D_3

in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Ebene $F_1 F_2 F_3$, womit unser Satz bewiesen ist. Die Bedeutung dieses Satzes werden wir erst im nächsten Paragraphen kennen lernen.

Der obige vom Verfasser im 51. Bande der Math. Annalen (1898) S. 403—406 gegebene Beweis sieht sowohl vom Archimedischen Postulate (s. § 8) als auch von jeder Voraussetzung über das Schneiden irgend zweier Geraden einer Ebene ab und kann es deshalb nicht vermeiden, neben den Postulaten der ebenen Bewegung auch die räum-

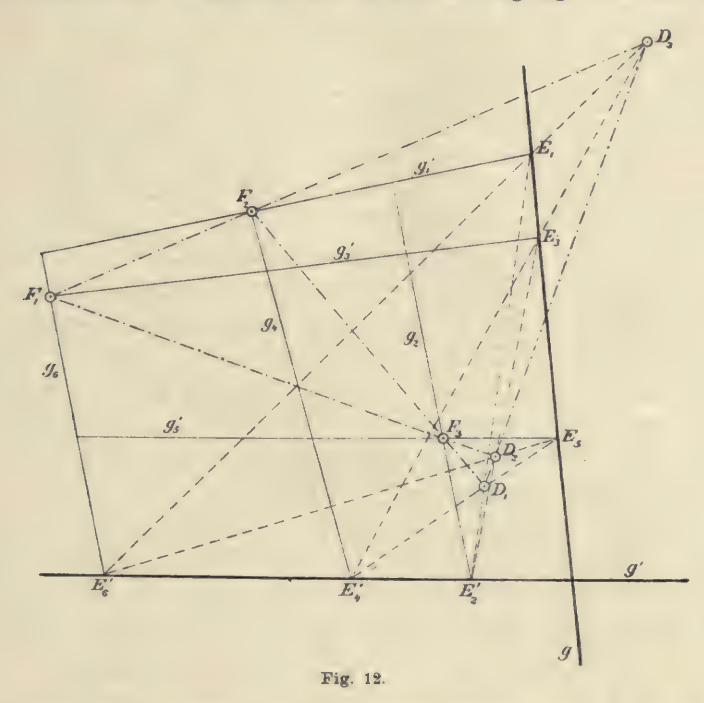


Fig. 12.

lichen projektiven Postulate zu benutzen. Einen andern Beweis gab später Dehn in seiner Inauguraldissertation „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck", Göttingen 1900, S. 22 (wieder abgedr. Math. Ann. 53, S. 404—439), setzt aber den Beweis desselben Satzes in der euklidischen Geometrie voraus, ohne im ganzen geringere Voraussetzungen zu machen (vgl. § 7).

No. 14. Senkrechte Ebenen und Geraden. Kongruenz. Spiegelung an einer Ebene. Wir haben die Postulate der Bewegung bisher nur für eine Ebene α angenommen. Wir setzen nunmehr voraus, daß *diese Postulate auch für alle Punkte des Raumes gelten mögen*, und fragen zuerst, welche Zuordnung die Umwendung $\mathfrak{U}$

einer Ebene α um eine Achse $a = AB$ zur Folge habe. Ist D irgend ein Punkt außerhalb der Ebene α, E ein Punkt der Strecke $\overline{AD}$ und E' der entsprechende Punkt auf der entsprechenden Strecke $\overline{AD}'$, so vertauscht $\mathfrak{U}$ die beiden Strecken $\overline{DE'}$ und $\overline{D'E}$, so daß diese einen sich selbst entsprechenden Punkt F gemein haben, der notwendig auf a liegen muß. Hieraus geht hervor, daß die Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Achse a auch jede andre Ebene durch a umwendet. Sie verwandelt daher jede Senkrechte AD und AE zu AB in ihr Komplement, läßt deshalb in der Ebene $ADE = \beta$ den Punkt A stehen und vertauscht die beiden Seiten von AD sowie die beiden Teile, in die AD die Ebene zerlegt, sie kann folglich erzeugt werden durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen an der Achse AD und der darauf senkrechten Achse AC in der Ebene ADE. Deshalb verwandelt $\mathfrak{U}$ jede in β gelegene Halbgerade durch A in ihr Komplement, d. h. alle diese Geraden sind senkrecht zu AB oder alle Senkrechten zu AB in A liegen in derselben Ebene. *Die Gerade AB heißt deshalb senkrecht zur Ebene ADE* und umgekehrt. Die Senkrechte AB zur Ebene ADE kann offenbar gefunden werden als die Senkrechte zu AC innerhalb der auf AD senkrechten Ebene. Wir sehen zugleich, daß die absoluten Pole einer Geraden a in allen sie enthaltenden Ebenen in einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden liegen, der *absoluten Polare der Geraden a.* Wir erhalten so den Satz:

31. Satz. *Die Umwendung um eine Achse AB wendet jede Ebene durch AB um. Die Senkrechten in A auf AB liegen in einer Ebene, die zu AB senkrecht genannt wird, und es steht umgekehrt eine Gerade AB, die auf zwei Geraden AD und AE senkrecht steht, auf allen durch A gehenden Geraden dieser Ebene senkrecht oder auf der Ebene senkrecht.*

Gehen wir nunmehr von drei zueinander senkrechten Geraden AB, AC und AD aus und betrachten diejenige Bewegung $\mathfrak{R}$, welche durch die Aufeinanderfolge der AC und AD vertauschenden Umwendung und der Umwendung an der Achse AD entsteht, so verwandelt $\mathfrak{R}$ die Halbgeraden AC und AD in AD und das Komplement von AC und läßt jede Seite von AB stehen. Es bleibt daher jeder Punkt von AB unverändert, weil nach dem obigen die zweimalige Anwendung von $\mathfrak{R}$ mit der Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Achse AB identisch ist. Denn ginge B durch $\mathfrak{R}$ etwa in einen von B verschiedenen Punkt B' der Strecke $\overline{AB}$ über, so müßte auch B' in einen Punkt der Strecke $\overline{AB'}$ übergehen, während es doch hier-

nach wieder in B verwandelt wird. Sind daher BE und BF die Senkrechten in B auf AB innerhalb der Ebenen ABC und ABD, so ordnet $\mathfrak{R}$ auch den Halbgeraden BE und BF die BF und das Komplement von BE zu (Fig. 13). Betrachten wir deshalb endlich diejenige Bewegung, welche durch die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{R}$ und der BE und BF vertauschenden Umwendung entsteht, so läßt diese Bewegung beide Seiten von BE stehen und verwandelt die Halbgeraden BA und BF in ihre Komplemente, ist also eine Umwendung um die Achse BE.

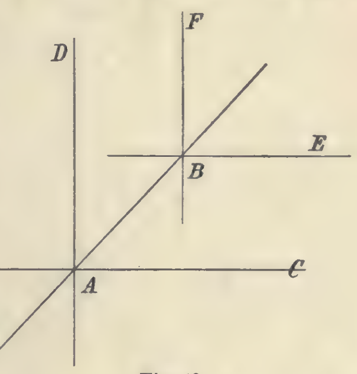


Fig. 13.

Hieraus folgt, daß auch $BF \perp BE$ oder auch BF senkrecht zur Ebene ABC ist. Wir erhalten daher das Resultat:

32. Satz. *Enthält eine Ebene ABD die Senkrechte AD zur Ebene ABC, so ist auch die Senkrechte in jedem Punkte von AB innerhalb der Ebene ABD senkrecht zur Ebene ABC, oder je zwei Senkrechte zu einer Ebene liegen in derselben Ebene. Die beiden Ebenen ABC und ABD heißen deshalb senkrecht aufeinander.*

Unser Satz lehrt zugleich, daß alle zu derselben Ebene senkrechten Geraden durch denselben eigentlichen oder uneigentlichen Punkt laufen, den *absoluten Pol der Ebene.* Es gehört daher allen Geraden b, die in einem Punkte A auf einer Geraden a senkrecht stehen, in der jedesmaligen Ebene $[b, a]$ derselbe absolute Pol $\mathfrak{b}$ zu, nämlich der absolute Pol der Ebene der Geraden b. Deshalb führt jede Umwendung um eine der Achsen b jeden Punkt P von a in denselben Punkt P' über, nämlich in den vierten harmonischen von P in bezug auf A und $\mathfrak{b}$. Wir erhalten daher den Satz:

33. Satz. *Bei allen Umwendungen einer Geraden a um die Achsen, die in einem Punkte A auf ihr senkrecht stehen, ist jedem Punkte von a derselbe Punkt zugeordnet.*

Erst dieser Satz ermöglicht den Beweis des folgenden die Streckenkongruenz im Raume begründenden Satzes:

34. Satz. *Bei allen Bewegungen, die einen Punkt A und eine Seite einer ihn enthaltenden Geraden a fest lassen, bleibt jeder Punkt dieser Geraden fest.*

Geht nämlich der auf a senkrechte Strahl AC bei einer solchen Bewegung $\mathfrak{R}$ in den ebenfalls auf a senkrechten Strahl AD über,

so läßt sich $\mathfrak{R}$ zusammensetzen aus derjenigen Umwendung, die AC und AD vertauscht, und der Umwendung um die Achse AD, womit nach dem 33. Satze unsere Behauptung bewiesen ist. Hiernach gilt nun auch im Raume der folgende Satz:

35. Satz. *Nennt man zwei Strecken* **kongruent,** *in Zeichen* $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$, *wenn* $\overline{AB}$ *durch irgend eine Bewegung in* $\overline{A'B'}$ *über geführt werden kann, so gibt es zu jeder Strecke* $\overline{AB}$ *auf einer bestimmten Seite irgend einer Geraden* a' *durch* A' *eine und nur eine ihr kongruent e Strecke* $\overline{A'B'}$.

Gäbe es nämlich zwei solche Strecken $\overline{A'B'}$ und $\overline{A'B_1}$, die aus $\overline{AB}$ durch die beiden Bewegungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ entstehen mögen, so würde, falls $\overline{\mathfrak{B}}$ die Umkehrung von $\mathfrak{B}$ ist, die durch Aufeinanderfolge der Bewegungen $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}_1$ entstehende Bewegung den Punkt A' und eine Seite der Geraden a' fest lassen und B' in B_1 verwandeln; nach dem 34. Satze muß also in der Tat B' mit B_1 zusammenfallen.

Wenn wir diesen Satz, der sonst als erstes Kongruenzaxiom aufgestellt zu werden pflegt, erst jetzt ableiten konnten, so liegt das an unserer Formulierung der Postulate der Bewegung (vgl. hierzu Peano, a. a. O. S. 75 ff.). Wir haben besonderen Nachdruck auf die ausdrückliche Auffassung der Bewegungen als einer *Gruppe*[1]) *von kollinearen Transformationen* der Ebene und des Raumes gelegt, die mehr oder weniger versteckt jeder Form der Kongruenzaxiome zugrunde liegt, und haben dabei die bestimmenden Elemente[2]) jeder Bewegung so allgemein wie möglich gewählt, so daß die besonderen erst später zutage treten. Zugleich aber zeigt sich die verschiedene Stellung unseres Satzes, je nachdem man ihn als einen Satz der ebenen oder der räumlichen Geometrie auffaßt. Im ersten Falle bedurften wir des 12. Postulats (Umkehrbarkeit des Winkels) zum Beweise nicht, während der Beweis im zweiten Falle ganz wesentlich auf diesem Postulate beruhte. Hätten wir uns wie am Anfange dieses Paragraphen auf ebene Postulate wenigstens insofern beschränken wollen, als wir zwar die Eigenschaften der Bewegungen einer Ebene in eine andere, aber nicht zugleich die damit verbundenen Bewegungen des

---

1) Diese Auffassung ist wohl zum erstenMale klar ausgesprochen worden von Helmholtz in d. Gött. Nachr. 1868, S. 193 ff.: Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen.

2) Vgl. hierzu Lie, Theorie der Transformationsgruppen, III. Abschn. Leipzig 1893, S. 473; Lie hat dort die Helmholtzsche Auffassung vertieft und erst streng begründet.

Raumes postuliert hätten, so hätten wir doch den 35. oder den 34. Satz als Postulat aufstellen müssen. Deshalb haben wir es vorgezogen, die Bewegung als räumliche Transformation zu postulieren, was auch sonst der Entstehung der Begriffe der Kongruenz besser entspricht.

Die große Rolle, die die Umwendungen bei den bisherigen Betrachtungen spielten, legt die Frage nahe, ob sich nicht jede Bewegung aus Umwenduugen zusammensetzen lasse. Betrachten wir zuerst die durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um zwei Achsen AB und AC derselben Ebene entstehende Bewegung, so bleibt hierbei nach dem 33. Satze jeder Punkt der auf dieser Ebene senkrechten Achse AD stehen; wir nennen daher diese Bewegung eine *Drehung* um die Achse AD. Wie aus dem Beweise des 27. Satzes folgt, kann diese Drehung auf mannigfaltige Weise durch Umwendungen um zwei andere Achsen ersetzt werden, von denen die eine eine beliebige auf AD senkrechte Gerade durch A ist; ja es ist klar, daß diese Achse auch die Senkrechte in irgend einem andern Punkte D auf AD sein kann. Denn führt eine solche Umwendung die auf AD senkrechte Halbgerade DE in DE' über, die Drehung hingegen in DF, so entsteht diese durch die Aufeinanderfolge der ersten Umwendung und derjenigen, welche DE' mit DF vertauscht. Ist auch $AB \perp AC$, so ist offenbar auch die Drehung eine Umwendung.

Handelt es sich nunmehr um eine Bewegung $\mathfrak{B}$, bei der *ein Punkt A fest bleibt*, so ist leicht zu sehen, daß sie eine Drehung ist. Führt nämlich $\mathfrak{B}$ die beiden aufeinander senkrechten Halbgeraden AB und AC in AB' und AC' über, und ordnet diejenige Umwendung $\mathfrak{U}$, welche AB mit dem Komplemente von AB' vertauscht, der AC die AC_1 zu, so kann $\mathfrak{B}$ ersetzt werden durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, wenn $\mathfrak{V}$ die beiden Halbgeraden AC' und AC_1 vertauscht. Ist daher AD die Senkrechte zur Ebene der Achsen dieser beiden Umwendungen, so ist $\mathfrak{B}$ eine Drehung um diese Achse. Wir erhalten so zuerst den Satz:

36. Satz. *Jede Bewegung, bei der ein Punkt A fest bleibt, ist eine Drehung um eine Achse AD und kann ersetzt werden durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen um zwei in irgend einem Punkte D von AD auf AD senkrecht stehende Achsen DE und DF so zwar, daß eine dieser beiden Achsen noch eine beliebige dieser Senkrechten ist; ist auch $DE \perp DF$, so ist die Drehung selbst eine Umwendung.*

Aus dem letzten Umstande können wir den Begriff *der Spiegelung an einer Ebene* α ableiten, der uns für die Folge nützlich sein wird. Ordnen wir nämlich jedem Punkte P denjenigen Punkt P' zu, der aus ihm durch Umwendung um die Spur einer auf α senkrechten Ebene durch P hervorgeht, so ist diese Zuordnung nach dem 33. Satze eindeutig und nichts anderes als die kollineare Spiegelung an der Ebene α und dem absoluten Pole von α; wir nennen sie daher Spiegelung schlechthin. Ihre Entstehung aus den Umwendungen zeigt aber, daß die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Ebenen wieder eine Umwendung um die Schnittlinie der beiden Ebenen liefert. Schneidet nämlich die zu dieser Schnittlinie AD senkrechte Ebene durch P die beiden spiegelnden Ebenen in den Geraden AB und AC, so daß $AB \perp AC$ sein muß, so geht der Definition gemäß P in sein Bild durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um die Achsen AB und AC über, also durch die Umwendung um AD. Umgekehrt kann jede Umwendung ersetzt werden durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen an irgend zwei aufeinander senkrechten Ebenen durch die Achse der Umwendung. Ersetzt man daher die beiden Umwendungen, die eine Drehung erzeugen, durch je zwei Spiegelungen, und zwar so, daß die Ebene durch die beiden Achsen der Umwendungen die Ebene der zweiten Spiegelung für die erste Umwendung und die Ebene der ersten Spiegelung für die zweite Umwendung ist, so ist klar, daß auch *jede* Drehung durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen an zwei Ebenen durch die Drehungsachse ersetzt werden kann. Wir erhalten so das Resultat:

37. Satz. *Nennen wir die kollineare Spiegelung an einer Ebene und deren absolutem Pole eine Spiegelung an dieser Ebene, so kann jede Drehung ersetzt werden durch die Aufeinanderfolge zweier Spiegelungen an zwei Ebenen durch die Drehungsachse; ist die Drehung eine Umwendung, so stehen die beiden Ebenen senkrecht aufeinander.*

No. 15. Umkehrbarkeit der Strecke. Mittelpunkt. Schiebung. Zusammensetzung jeder Bewegung durch zwei Umwendungen. Falls bei einer Bewegung kein Punkt fest bleibt, so bedürfen wir eines neuen Postulats, das die Umkehrbarkeit der Strecke ausspricht und lautet:

13. Postulat. *Die Bewegung, die einen Punkt A in einen Punkt B und die Verlängerung von AB über A hinaus in diejenige über B hinaus verwandelt und eine Seite einer AB enthaltenden Ebene α stehen läßt, führt auch B in A über.* ***(Umkehrung der Strecke.)***

Daß auch diese Bewegung 𝔙 eine Umwendung ist, können wir folgendermaßen beweisen. Verbinden wir sie mit der Umwendung 𝔘 um die Achse AB, so entsteht eine Bewegung 𝔚, die ebenfalls A und B sowie die B zugewandte Seite von AB mit der A zugewandten Seite von BA und endlich die beiden Seiten der Ebene α miteinander vertauscht. Die zweimalige Anwendung von 𝔚 ergibt daher die Identität, so daß, wenn 𝔚 einem außerhalb der Geraden AB gelegenen Punkte C den Punkt D' zuordnet, durch 𝔚 die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD'}$ in die Strecken BA und $\overline{D'C}$ verwandelt werden. Da nun C und D' auf verschiedenen Seiten von AB liegen, so enthält die Strecke $\overline{CD'}$ einen Punkt M der Geraden AB, der sich selbst entsprechen muß (Fig. 14). Da aber 𝔘 jeden Punkt von AB stehen läßt, so läßt auch 𝔙 den Punkt M stehen. Der Definition von 𝔙 gemäß kann M keiner der beiden Verlängerungen der Strecke $\overline{AB}$ angehören, M ist also ein Punkt dieser Strecke selbst und wird ihr *Mittelpunkt* genannt. Nun ist klar, daß 𝔙 die Umwendung um die in M auf AB senkrecht stehende Achse in α ist. Wählen wir C auf der Senkrechten in A auf AB, so liegt D' auf der Senkrechten in B auf BA, so daß hiernach der Mittelpunkt mit Hilfe des Streckenübertragers und des Lineals konstruiert werden kann. Wir können daher unserm Postulate auch die Form geben:

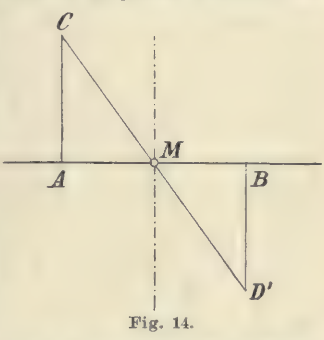


Fig. 14.

38. Satz. *Jede Strecke $\overline{AB}$ kann durch Umwendung um eine im Mittelpunkte dieser Strecke auf ihr senkrecht stehende Achse in die Strecke $\overline{BA}$ übergeführt werden, oder jede Strecke ist umkehrbar.*

Hiernach gibt es offenbar zwei Bewegungen, die einen Punkt A in B überführen und die Gerade AB sowie beide Seiten einer AB enthaltenden Ebene α stehen lassen. Die eine ist die eben behandelte Umwendung 𝔙, und die andere entsteht durch die Aufeinanderfolge von 𝔙 und der Umwendung um die in B auf AB senkrecht stehende Achse in α; wir wollen diese zweite Bewegung eine *Schiebung* 𝔖 nennen. Zunächst ist wie oben leicht zu sehen, daß 𝔖 auf mannigfaltige Art durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen um zwei auf AB senkrechte Achsen in α erzeugt werden kann, von denen die eine noch beliebig ist; ja die beiden Achsen können sogar in irgend einer Ebene durch AB liegen. Ersetzen wir nämlich dem

37. Satze gemäß die beiden Umwendungen, die $\mathfrak{S}$ erzeugen, durch je zwei Spiegelungen, und zwar so, daß die zweite spiegelnde Ebene der ersten Umwendung und die erste spiegelnde Ebene der zweiten Umwendung mit α zusammenfallen, so leuchtet ein, daß $\mathfrak{S}$ auch durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an zwei zu AB senkrechten Ebenen entsteht. Daraus aber folgt rückwärts, daß $\mathfrak{S}$ auch durch zwei Umwendungen um die Spuren dieser Ebenen in irgendeiner Ebene β durch AB erzeugt werden kann, wenn man nämlich zwei Spiegelungen an β zwischen die beiden obigen Spiegelungen einschiebt. Wir erhalten daher das Resultat:

39. Satz. *Ein Punkt A kann in jeden andern Punkt B durch eine sogenannte Schiebung längs der Achse AB übergeführt werden. Die* **Schiebung** *entsteht durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen um zwei in derselben Ebene gelegene auf AB senkrechte Achsen, so zwar, daß die eine Achse noch beliebig unter den zu AB senkrechten Geraden ist, und durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an zwei zu AB senkrechten Ebenen. Es bleibt daher jede durch die Schiebungsachse begrenzte Halbebene fest bei der Schiebung.*

Zugleich gilt der dem 34. Satze entsprechende Satz:

40. Satz. *Bei allen Bewegungen, die eine Gerade und eine Ebene durch diese Gerade stehen lassen, bleibt jede Ebene durch diese Gerade fest.*

Es mag aber schon an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß ohne das Parallelenaxiom nicht bewiesen werden kann, daß bei der Schiebung auch *jede* Verbindungsgerade zweier entsprechender Punkte fest bleibt (vgl. § 6).

Nunmehr ist es leicht, zu beweisen, daß man jede Bewegung durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen ersetzen kann. Denken wir uns nämlich eine solche Bewegung nach dem 11. Postulate dadurch definiert, daß die aufeinander senkrechten Halbgeraden AB und AC in die aufeinander senkrechten Halbgeraden $A'B'$ und $A'C'$ übergeführt werden, so können wir durch eine Schiebung $\mathfrak{S}$ zuerst A in A' verwandeln. Gehen hierbei AB und AC in $A'B_1$ und $A'C_1$ über, so können wir nach dem 36. Satze $A'B_1$ und $A'C_1$ durch eine Drehung $\mathfrak{D}$ um die Achse $A'D$ in $A'B'$ und $A'C'$ überführen. Erzeugen wir dann $\mathfrak{S}$ resp. $\mathfrak{D}$ durch die Aufeinanderfolge von je zwei Umwendungen, von denen die zweite resp. erste die auf $AA'D$ senkrechte Gerade zur Achse hat, so ist die Aufeinanderfolge dieser vier Umwendungen, da sich die beiden mittleren auf-

heben, mit der von zweien äquivalent. Wir erhalten daher das Resultat[1]):

41. Satz. *Jede Bewegung kann durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen ersetzt werden.*

Ersetzen wir jede dieser beiden Umwendungen durch zwei Spiegelungen, so sieht man, daß jede Bewegung durch die Aufeinanderfolge von höchstens vier Spiegelungen erzeugt werden kann. Da aber bei einer Spiegelung jeder Punkt in den entsprechenden von dem absoluten Pole der spiegelnden Ebene *projiziert* wird, so erhalten wir das für die Folge wichtige Resultat:

42. Satz. *Geht die Figur $ABCD\ldots$ durch eine Bewegung in die Figur $A'B'C'D'\ldots$ über, so können diese Figuren auch durch die Aufeinanderfolge von höchstens vier Projektionen aus festen Punkten ineinander übergeführt werden.*

Aus dem 41. Satze folgt, daß auch im Raume jede Figur aus derjenigen Figur, aus welcher sie vermöge einer Bewegung hervorgeht, mit Hilfe des Streckenübertragers und des Lineals konstruiert werden kann. Aus den bisherigen Entwickelungen geht aber auch hervor, daß alle hierbei in Betracht kommenden *räumlichen* Konstruktionen nach den Methoden der gewöhnlichen darstellenden Geometrie durch Bezugnahme auf zwei zueinander senkrechte Tafeln und Umlegung der einen in die andere vermittelst *Zeichnens innerhalb einer und derselben Ebene* ausgeführt werden können. Hierbei werden jeder Punkt und jede Gerade dargestellt durch ihre orthogonalen Projektionen auf die beiden Tafeln und jede Ebene durch ihre Spuren in ihnen. Im besonderen gilt auch in unserer allgemeinen Geometrie der Satz, daß die Projektion einer auf einer Ebene senkrechten Geraden auf der Spur dieser Ebene senkrecht steht. Denn die die Gerade projizierende Ebene steht sowohl auf der Tafel als auch auf der Ebene senkrecht, die Spur dieser folglich auf der projizierenden Ebene, also auch auf der Projektion der Geraden. Wie im übrigen die Lösungen der Elementaraufgaben in Rücksicht darauf zu ändern sind, daß vom Ziehen von Parallelen abgesehen werden muß, ist hiernach leicht zu übersehen.

1) Vgl. H. Wiener, Zur Theorie der Umwendungen, Leipz. Ber. 1890, S. 83. Die Zurückführung jeder Bewegung auf eine sogenannte Schraubung bedarf noch bestimmter Annahmen über das Schneiden zweier Geraden derselben Ebene.

§ 4.

Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie und das Rechnen mit projektiven Strecken.

No. 16. Projektivität n^{ter} Stufe. Das im 42. Satze ausgesprochene Resultat veranlaßt uns zu der folgenden Definition einer projektiven Beziehung oder einer Projektivität zwischen den Punkten zweier Geraden, wobei wir es wie immer in diesem Paragraphen, wenn nichts darüber ausgesagt ist, dahingestellt sein lassen, ob die betrachteten Punkte und Geraden eigentliche seien oder nicht, mögen sie auch in den Figuren als eigentliche angenommen sein.

6. Definition: *Eine Projektivität n^{ter} Stufe zwischen zwei geraden Punktreihen g_1 und g_{n+1} derselben Ebene entsteht durch Projektion von g_1 auf g_2 aus S_1, von g_2 auf g_3 aus $S_2, \ldots,$ von g_n auf g_{n+1} aus S_n.*[1])

Aus dieser Definition ergibt sich sofort der folgende Satz:

43. Satz. *Jede Projektivität ist eine solche umgekehrt eindeutige Beziehung der Punkte zweier Geraden, daß je vier harmonischen Punkten der einen Geraden vier harmonische Punkte der andern entsprechen.*

Die Projektion der Geraden g_i auf g_{i+1} aus S_i kann nämlich betrachtet werden als enthalten in der zentralen Kollineation mit dem Zentrum S_i, irgend einer Achse durch den Punkt (g_i, g_{i+1}) und g_{i+1} als dem Bilde von g_i (vgl. den 21. Satz), in der dem Vierecke, das nach dem 22. Satze vier harmonische Punkte von g_i bestimmt, ein Viereck entspricht, dessen Seiten und Diagonalen durch die entsprechenden Punkte von g_{i+1} gehen, also ebenfalls vier harmonische Punkte bestimmen. Sind daher auf g_{n+1} die Bilder $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$, von irgend drei Punkten A_1, B_1, C_1 auf g_1 bekannt, so können ganz unabhängig von der Wahl der Zwischengeraden $g_2, \ldots, g_n$ und der Projektionszentren $S_1, \ldots, S_n$ auf g_{n+1} die Bilder von unbegrenzt vielen Punkten der g_1 gefunden werden. Denn ist D_1 der vierte

1) Vgl. hierzu Thomae, Ebene geometr. Gebilde 1. und 2. Ordnung vom Standpunkte der Geometrie der Lage. Halle, 1873, S. 12, wo allerdings der Begriff der Stufe fehlt; s. auch Cremona, Elementi di geometria projettiva, Roma 1873, S. 7.

harmonische Punkt von C_1 in bezug auf A_1 und B_1, so entspricht ihm jedenfalls der vierte harmonische Punkt D_{n+1} von C_{n+1} in bezug auf A_{n+1} und B_{n+1}, ebenso dem vierten harmonischen E_1 von C_1 in bezug auf A_1 und D_1 der vierte harmonische E_{n+1} von C_{n+1} in bezug auf A_{n+1} und D_{n+1} usf. Es liegt daher der Gedanke nahe, daß durch obige Zuordnung jedem Punkte P_1 auf g_1 sein Bild P_{n+1} auf g_{n+1} unabhängig von der Wahl der Zwischengeraden und Projektionszentren zugewiesen sei.

Zur Bestätigung dieser Vermutung führen die folgenden Betrachtungen. Aus dem Desarguesschen Satze ergibt sich zunächst unmittelbar der folgende:

44. Satz. *Die Projektivität 2. Stufe zwischen zwei Geraden g_1 und g_3 kann durch eine solche erster Stufe oder eine Perspektivität ersetzt werden, wenn g_2 durch den Schnittpunkt A von g_1 und g_3 geht.*

Denn die Dreiecke $B_1B_2B_3$ und $C_1C_2C_3$ liegen perspektiv in bezug auf das Zentrum A, so daß sich die Strahlen B_1B_3 und C_1C_3 auf S_1S_2 schneiden.

Hieraus folgt weiter:

45. Satz. *Ist eine Projektivität 2. Stufe zwischen zwei Geraden g_1 und g_3 gegeben, so kann g_2 durch irgend eine Gerade g_2' ersetzt werden, die weder durch den Punkt (g_1, g_3) geht noch einen Punkt P_1 auf g_1 mit dem ihm entsprechenden Punkte P_3 von g_3 verbindet.*

Aus dem vorigen Satze folgt nämlich zuerst, daß man g_2 ersetzen kann durch eine Gerade g_2', die den Punkt $(g_2, g_3) = D_2 = D_3$ mit irgend einem Punkte $E_1 = E_2'$ auf g_1 verbindet (Fig. 15). Denn schneidet S_1P_1 die g_2' in P_2', so geht nach diesem Satze $P_2'P_3$ stets durch den Punkt $S_2' = (E_1E_3, S_1S_2)$. Nun kann man ebenso g_2' durch eine Gerade g_2'' ersetzen, die E_1 mit irgend einem von E_3 verschiedenen Punkte F_3 auf g_3 verbindet. Da man endlich diese Gerade auch durch F_3D_1 ersetzen kann, so ist unser Satz bewiesen.

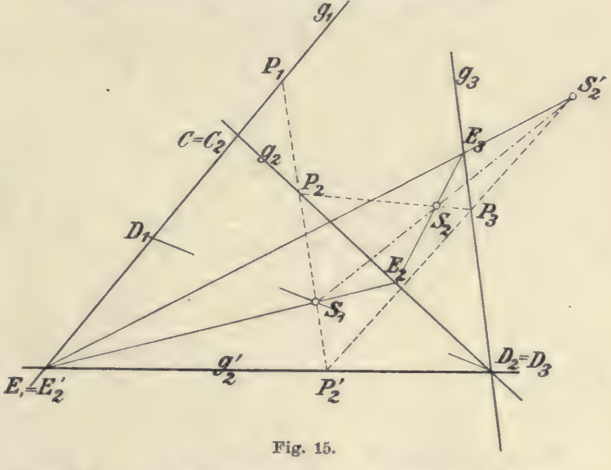


Fig. 15.

No. 17. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Hieraus ergibt sich leicht der folgende Satz:

46. Satz. *Jede Projektivität zwischen zwei verschiedenen Geraden derselben Ebene ist entweder eine solche der 2. Stufe oder eine Perspektivität.*

Handelt es sich nämlich um eine Projektivität 3. Stufe zwischen den Geraden g_1 und g_4, so kann man nach dem letzten Satze ohne Änderung der damit verknüpften Projektivität 2. Stufe zwischen g_1 und g_3 die g_2 durch eine Gerade g_2' ersetzen, die den Punkt (g_3, g_4) enthält, falls dieser Punkt nicht zugleich auf g_1 liegt. Schließen wir also diesen Fall zunächst aus, so können wir nach dem 44. Satze die Projektivität 2. Stufe zwischen g_2' und g_4 durch eine Perspektivität, die gegebene Projektivität 3. Stufe zwischen g_1 und g_4 folglich durch eine solche der 2. Stufe ersetzen. Liegt aber der Punkt (g_3, g_4) auf g_1, so kann man ohne Änderung der Projektivität 2. Stufe zwischen g_2 und g_4 die g_3 durch eine Gerade g_3 ersetzen, die den Punkt (g_1, g_2) enthält, falls dieser Punkt nicht zugleich auf g_4 liegt. Schließen wir dies aus, so kann man wieder die Projektivität 2. Stufe zwischen g_1 und g_3' durch eine Perspektivität, also die gegebene Projektivität durch eine solche der 2. Stufe ersetzen. Gingen endlich g_1, g_2, g_3 und g_4 durch denselben Punkt, so wäre die gegebene Projektivität sogar eine Perspektivität. Durch eine wiederholte Anwendung dieser Schlußweise ergibt sich unser Satz.

Beruhten unsere bisherigen Schlüsse ausschließlich auf dem Desarguesschen Satze, so bedürfen wir zum Beweise des folgenden Satzes, der das allgemeine Kriterium für das Eintreten der Perspektivität zwischen zwei projektiven Punktreihen angibt, auch des Pascalschen Satzes (30. Satz auf S. 36), zu dessen Beweise wir auch die Postulate der Bewegung benutzt haben. Der Satz lautet:

47. Satz. *Eine Projektivität zwischen zwei verschiedenen Geraden derselben Ebene ist dann und nur dann eine Perspektivität, wenn der Schnittpunkt der beiden Geraden sich selbst entspricht.*

Wir können nämlich jede Projektivität zwischen den Geraden g_1 und g_3 nach dem letzten Satze immer als eine solche der 2. Stufe ansehen. Hierbei wird der Punkt $(g_1, g_3) = A_1 = A_3$ (Fig. 16) dann und nur dann sich selbst entsprechen, wenn entweder g_2 oder $S_1 S_2$ durch diesen Punkt geht. Im ersten Falle ergibt sich unsere Behauptung aus dem 44. Satze und im zweiten Falle durch Anwendung des Pascalschen Satzes auf die beiden Geraden g_2 und $S_1 S_2$. Setzen wir dann nämlich wieder $(g_1, g_2) = C_2$ und $(g_2, g_3) = D_2$, so schneiden

sich nach diesem Satze die gegenüberliegenden Seiten des Sechsecks $C_2 S_2 P_2 S_1 D_2 A_1$ in den Punkten $S = (C_2 S_2, S_1 D_2)$, $P_3 = (S_2 P_2, D_2 A_1)$, $P_1 = (P_2 S_1, A_1 C_2)$ einer Geraden, die Strahlen $P_1 P_3$ laufen folglich durch den festen Punkt S. Daß die Projektivität nur dann eine Perspektivität sein kann, wenn $A_1 = A_3$ sich selbst entspricht, ist ja selbstverständlich.

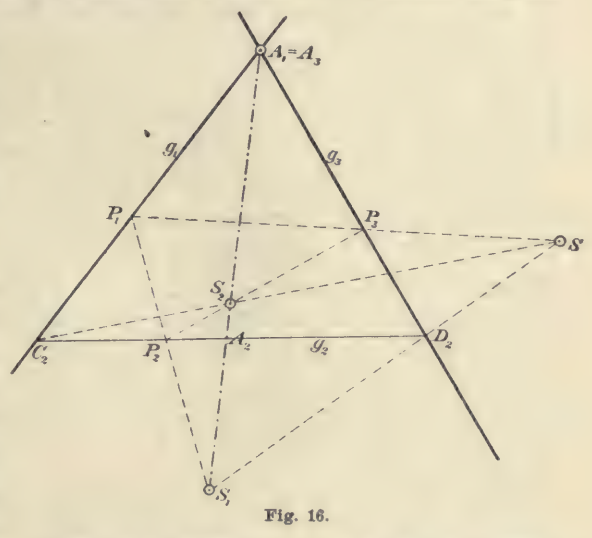


Fig. 16.

Nunmehr ist es leicht, den sogenannten Fundamentalsatz der projektiven Geometrie zu beweisen:

48. Satz. *Eine Projektivität zwischen den Punkten zweier Geraden g_1 und g_3 einer und derselben Ebene, die auch zusammenfallen können, ist dadurch eindeutig bestimmt, daß irgend drei Punkten A_1, B_1, C_1 von g_1, drei Punkte A_3, B_3, C_3 von g_3 als entsprechend zugewiesen sind.* ***(Fundamentalsatz der projektiven Geometrie).***

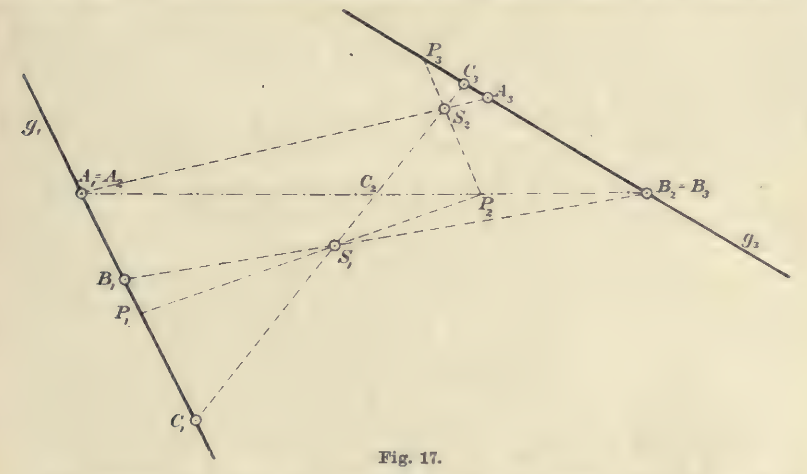


Fig. 17.

Ist zuerst g_1 von g_3 verschieden, so setzen wir $g_2 = A_1 B_3$, $S_1 = (B_1 B_3, C_1 C_3)$ und $S_2 = (A_1 A_3, C_1 C_3)$ (Fig. 17); dann erfüllt die hierdurch bestimmte Projektivität 2. Stufe jedenfalls die Forderung

und liefert zu jedem Punkte P_1 von g_1 den entsprechenden Punkt P_3 von g_3 mit Hilfe eines Punktes P_2 auf g_2. Würde nun bei einer anderen der Forderung genügenden Projektivität dem Punkte P_1 der Punkt P_3' entsprechen, so entspricht bei der aus dieser durch weitere Projektion der g_3 auf g_2 von S_2 aus hervorgehenden Projektivität zwischen g_1 und g_2 der Punkt A_1 sich selbst, so daß nach dem 47. Satze $P_1 P_2'$ durch den Punkt $(C_1 C_2, B_1 B_2) = (C_1 C_3, B_1 B_3) = S_1$ laufen muß. Es fällt daher P_2' mit P_2 und folglich auch P_3' mit P_3 zusammen.

Fällt g_1 mit g_3 zusammen, so projizieren wir g_3 von irgend einem Punkte S' aus auf irgend eine Gerade g_3' und betrachten die dadurch entstehende Projektivität zwischen g_1 und g_3'. Dann ist diese nach dem Obigen dadurch eindeutig bestimmt, daß den Punkten A_1, B_1, C_1 die Punkte A_3', B_3', C_3', die Projektionen der Punkte A_3, B_3, C_3 von S' aus, zugewiesen sind; hieraus folgt auch die Eindeutigkeit der Projektivität[1]) zwischen g_1 und g_3, die im allgemeinen von der 3. Stufe sein wird.

Daß in der Tat eine Projektivität zwischen den Punkten *derselben* Geraden nicht notwendig durch eine solche der 2. Stufe ersetzt zu werden braucht, folgt schon daraus, daß in einer solchen die Schnittpunkte von $g_1 = g_3$ mit g_2 und mit $S_1 S_2$ sich selbst entsprechen müssen. Um aber ohne näheres Eingehen auf diese hier doch nicht zu erledigende Frage zu zeigen, daß nicht jede Projektivität zwischen den Punkten einer und derselben Geraden g_1 sich selbst entsprechende Elemente hervorruft, weisen wir auf diejenige Projektivität hin, welche dadurch entsteht, daß wir g_1 von einem Punkte S_1 durch ein Strahlenbündel auf g_2 projizieren, dann g_2 um S_1 nach g_4 drehen und g_4 von $S_4 = S_1$ aus wieder nach $g_5 = g_1$ projizieren; da g_2 durch die Aufeinander-

1) Der obige Beweis des Fundamentalsatzes wurde vom Verf. in den Math. Ann. Bd. 51, S. 406—9 gegeben (1898). Nur der Beweis des 45. Satzes ist nach Veblen abgeändert worden (vgl. Whitehead, The Axioms of Projective Geometry, Cambridge 1906, S. 18). Daß der Fundamentalsatz auf Grund der Sätze des Desargues und des Pascal ohne ein Stetigkeitsaxiom beweisbar sei, hat zuerst H. Wiener ausgesprochen (Üb. die Grundl. u. d. Aufbau d. Geometrie, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 1. Bd., 1891, S. 47), ohne den Beweis hierfür auch nur anzudeuten. Wohl aber war Weierstraß im Besitze eines solchen (allerdings auf die euklidische Geometrie beschränkten) Beweises, der nach der Veröffentlichung durch H. A. Schwarz und E. Kötter in Weierstraß' Werken (Rein geometr. Beweis des Hauptsatzes der projekt. Geometrie, III. Bd., S. 161—174, Berlin, 1903) auf einem ähnlichen Gedankengange beruht. An Stelle des Pascalschen Satzes tritt der Satz vom Peripheriewinkel im Kreise (vgl. hierzu § 6).

folge von zwei Umwendungen nach g_4 übergeführt werden kann, so entsteht hierdurch auf $g_1 = g_5$ eine Projektivität 4. Stufe, die keine sich selbst entsprechenden Elemente hervorrufen kann (vgl. S. 34).

No. 18. Projektive Strecken. Prospektivität. Auf dieser Grundlage kann die Geometrie der Lage, wie sie v. Staudt in seinen klassischen Werken[1]) entwickelt hat, auch ohne das Parallelaxiom und ein Stetigkeitsaxiom aufgebaut werden. Für uns wird es von besonderer Wichtigkeit sein, die Staudtsche Wurfrechnung, die als projektive Verallgemeinerung der gewöhnlichen Streckenrechnung betrachtet werden kann und deshalb in jeder Geometrie gelten wird, zu entwickeln. Wir wollen daher den von Staudt als Wurf bezeichneten Begriff *projektive Strecke* nennen. Wenn wir nun auch zum Zwecke der Festsetzung des Rechnens mit diesen Strecken zunächst den Fundamentalsatz voraussetzen, so wollen wir doch die Definitionen und Beweise so einrichten, daß daraus klar hervorgeht, was vom Fundamentalsatze oder vom Pascalschen Satze abhängig sei, und was nicht.

Die gewöhnliche Addition von Strecken einer Geraden geschieht bekanntlich durch eine solche Verschiebung der Geraden in sich, welche den Anfangspunkt des einen Summanden mit dem Endpunkte des anderen zur Deckung bringt. Eine derartige Verschiebung der Geraden in sich ist aber eine Projektivität, bei der der unendlich ferne Punkt und nur dieser sich selbst entspricht. Die projektive Verallgemeinerung der Streckenaddition wird also von solchen

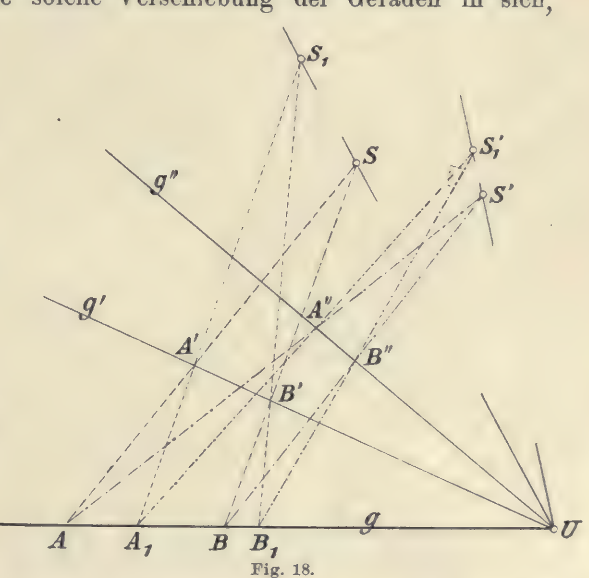


Fig. 18.

Projektivitäten einer Geraden g ausgehen müssen, bei denen ein und nur ein Punkt U sich selbst entspricht. Entsprechen in einer solchen

1) C. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, und Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856.

Projektivität, die wir *Prospektivität* nennen wollen, den Punkten A, B, U die Punkte A_1, B_1, U und projizieren wir A und B von irgendeinem Punkte S aus auf eine den Punkt U enthaltende Gerade g' nach A' und B', so müssen sich $A_1 A'$ und $B_1 B'$ in einem Punkte S_1 auf US schneiden (Fig. 18). Da nämlich diejenige Projektivität 2. Stufe, welche durch Projektion von g aus S auf g' und von g' aus S_1 wieder auf g zurück entsteht, nach dem Fundamentalsatze zu jedem Punkte P von g denselben Punkt liefern muß wie jede andre der Bedingung, daß A_1, B_1, U die Bilder von A, B, U seien, genügende, so muß jedenfalls der Schnittpunkt von SS_1 mit g sich selbst entsprechen. Soll also unsre Projektivität eine Prospektivität sein, so muß SS_1 durch U gehen. Hieraus geht hervor, daß eine Prospektivität in bezug auf das *Deckelement* U vollständig bestimmt ist, falls das Bild A_1 irgend eines Punktes A gegeben ist. Dies läßt sich auch unabhängig vom Fundamentalsatze beweisen, wenn wir die Prospektivität folgendermaßen definieren.

7. **Definition.** *Eine* ***Prospektivität*** *der Punkte einer Geraden g in Beziehung auf das Deckelement U entsteht dadurch, daß g von irgend einem Punkte S aus auf eine U enthaltende Gerade g' und g' von irgendeinem Punkte S_1 der Geraden US wieder auf g zurück projiziert wird.*

Es läßt sich nämlich zeigen, daß diese Beziehung *von der Wahl des Punktes S und der Geraden g' durch U unabhängig ist,* wenn nur das Bild A_1 von A gegeben bleibt. Denn gehen S und g' in S' und g'' über, schneiden $S'A$ und $S'B$ die g'' in A'' und B'' und $A_1 A''$ die Gerade US' in S_1', so liegen sowohl die Dreiecke $A'B'S$ und $A''B''S'$ als die Dreiecke $A'SS_1$ und $A''S'S_1'$ in Beziehung auf die Achse g perspektiv. Es laufen daher die Geraden $A'A''$, $B'B''$, SS' und $S_1 S_1'$ durch denselben Punkt; in bezug auf diesen liegen daher auch die Dreiecke $A'B'S_1$ und $A''B''S_1'$ perspektiv, so daß sich in der Tat $S_1 B'$ und $S_1' B''$ in demselben Punkte B_1 von g schneiden müssen. Es ist also unabhängig vom Fundamentalsatze der Satz bewiesen:

49. Satz. *Eine Prospektivität in bezug auf das Deckelement U ist dadurch vollständig bestimmt, daß das Bild A_1 irgend eines Punktes A gegeben ist.*

Weiter folgt leicht der Satz:

50. Satz. *Durch die Aufeinanderfolge zweier Prospektivitäten mit dem Deckelemente U entsteht eine ebensolche.*

Denn werden A_1 und B_1 von S_1 aus auf irgend eine Gerade g'' durch U nach A'' und B'' projiziert und diese von S_2 (auf US) aus nach A_2 und B_2 auf g, so liegen die Dreiecke $AA'A''$ und $BB'B''$ in Beziehung auf U perspektiv, so daß sich AA'' und BB'' in einem Punkte S' von SS_1 oder SS_2 schneiden müssen. Stellen wir daher die Definition auf:

8. Definition. *Zwei projektive Strecken* (AB) *und* (A_1B_1) *derselben Geraden heißen einander gleich in bezug auf das Deckelement* U, *in Zeichen* $(AB) = (A_1B_1)$, *wenn die Punkte* A, B *durch eine Prospektivität mit dem Deckelemente* U *in* A_1, B_1 *übergeführt werden können,* so ergibt sich naturgemäß die folgende Definition für die Addition zweier Strecken.

No. 19. Addition projektiver Strecken.

9. Definition. *Eine projektive Strecke* (OC) *heißt die* **Summe** *der projektiven Strecken* (OA) *und* (OB), *in Zeichen* $(OC) = (OA) + (OB)$ *wenn in einer Prospektivität mit dem Deckelemente* U *den Punkten* O, A *die Punkte* B, C *entsprechen.*

Jedenfalls ist klar, daß diese Addition in die gewöhnliche übergeht, wenn die Gerade g die euklidische und U ihr unendlich ferner Punkt ist. Es ist aber auch leicht zu sehen, daß die so definierte Addition den bekannten Regeln genügt. Zunächst ergibt sich das Bestehen des *kommutativen Gesetzes der Addition.* Die zur Konstruktion der Summe (OC) dienende Figur 19 zeigt nämlich unmittelbar, daß auch UOB prosp. UAC, wenn man den Punkten O', A' und der Geraden US die Rolle von S, S' und g' resp. zuweist, es ist daher auch $(OC) = (OB) + (OA)$.

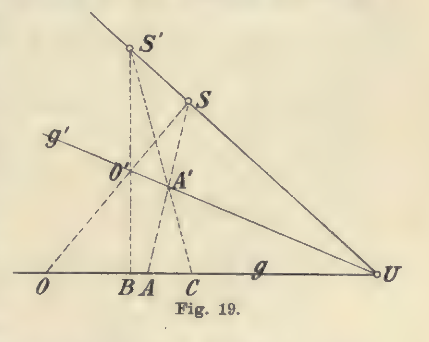


Fig. 19.

Da hiernach $(OB) = (AC)$ ist, so besagt unsre Definition nur daß:

$$\text{(I)} \qquad (OC) = (OA) + (AC).$$

Setzen wir ferner bei beliebiger Annahme von C:

$$(OA) + (OB) = (OC_1), \quad (OB) + (OC) = (OA_1),$$

so ist hiernach UAC_1 prosp. UOB prosp. UCA_1, also nach dem 50. Satze auch UAC_1 prosp. UCA_1. Wird diese Prospektivität durch die Zentren S und S_1 hergestellt, und schneiden SA und SC die U enthaltende Achse g' in T und T_1 (Fig. 20), so entsprechen in der-

jenigen kollinearen Spiegelung (23. Satz auf S. 27) in bezug auf das Zentrum U, welche S, T mit S_1, T_1 vertauscht, den Punkten A, C die Punkte A_1, C_1. Ist daher O_1 das Spiegelbild von O, so schneiden sich einerseits OS und A_1S_1 sowie O_1S_1 und AS und andrerseits OS und C_1S_1 sowie O_1S und CS in je zwei Punkten eines Strahles durch U. Es ist folglich der Definition gemäß einerseits UOA prosp. UA_1O_1 und andrerseits UOC prosp. UC_1O_1, folglich:

$$(OA) + (OA_1) = (OO_1) = (OC) + (OC_1).$$

Fig. 20.

In dieser Gleichung, die man auch schreiben kann:

$$(OA) + \{(OB) + (OC)\} = \{(OA) + (OB)\} + (OC),$$

ist das sogenannte *assoziative Gesetz der Addition* enthalten. Aus beiden Gesetzen ergibt sich in bekannter Weise das Resultat:

51. Satz. *Eine Summe von beliebig viel projektiven Strecken ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.*

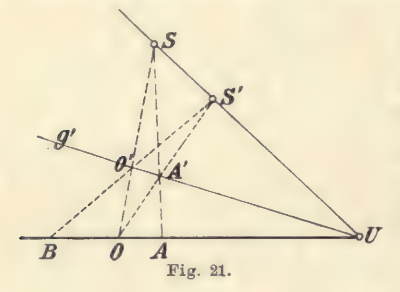


Fig. 21.

Die Summe zweier Strecken (OA) und (OB) ergibt offenbar eine uneigentliche Strecke oder eine solche, deren Endpunkte zusammenfallen, wenn UOA prosp. UBO oder wenn A und B durch U und O harmonisch getrennt sind (Fig. 21 und 22. Satz auf S. 27). Wir wollen sie *Nullstrecke* nennen und mit 0 bezeichnen. Setzen wir wieder:

$$(OB) + (OC) = (OA_1) \quad \text{und} \quad (OA) + (OA_1) = (OO_1),$$

so daß UOB prosp. UCA_1 und UOA prosp. UA_1O_1, so wird UA_1O_1 prosp. UOA prosp. UBO prosp. UA_1C, es ist folglich auch UA_1O_1 prosp. UA_1C, also fällt O_1 mit C zusammen. *Die Nullstrecke ist daher eine solche, welche zu einer andern Strecke addiert diese nicht ändert;* in der Tat verwandelt sich die die Addition definierende Prospektivität in die Identität, wenn etwa B mit O zusammenfällt.

Unsre Addition projektiver Strecken erfüllt also wirklich alle Regeln der Addition gewöhnlicher Strecken, und zwar unabhängig vom Fundamentalsatze.

No. 20. Projektive Ähnlichkeit. Multiplikation projektiver Strecken. Wollen wir weiter die *Multiplikation* beliebiger projektiver Strecken einer Geraden g in geeigneter Weise definieren, so müssen wir wie in der Arithmetik von der Vervielfältigung einer Strecke oder der Addition gleicher Strecken ausgehen. Ist nun einerseits:

$$(OA) + (OA) = (OA_2), \quad (OA_2) + (OA) = (OA_3), \text{ usw.,}$$

und andrerseits:

$$(OE) + (OE) = (OE_2), \quad (OE_2) + (OE) = (OE_3), \text{ usw.,}$$

so führt diejenige zentrale Kollineation (22. Satz auf S. 27) mit dem Zentrum U und irgend einer Achse a durch O, in welcher A das Bild von E ist, für jedes n den Punkt E_n in A_n über. Denn durch eine solche Kollineation geht jedesmal diejenige Konstruktion, die E_n aus E_{n-1} und E finden läßt, in die entsprechende Konstruktion für A_n, A_{n-1} und A über. Betrachtet man daher die projektive Strecke (OE_n) als Repräsentanten der ganzen Zahl n, so wird man $(OA_n) = (OA) \times (OE_n)$ setzen können und überhaupt $(OC) = (OA) \times (OB)$, wenn in der obigen zentralen Kollineation C das Bild von B ist. Um die hieraus fließende Definition der Multiplikation zu rechtfertigen, müssen wir zuerst untersuchen, ob die durch die zentrale Kollineation hervorgerufene Zuordnung der Punkte von g auch von der Wahl der Achse a unabhängig ist.

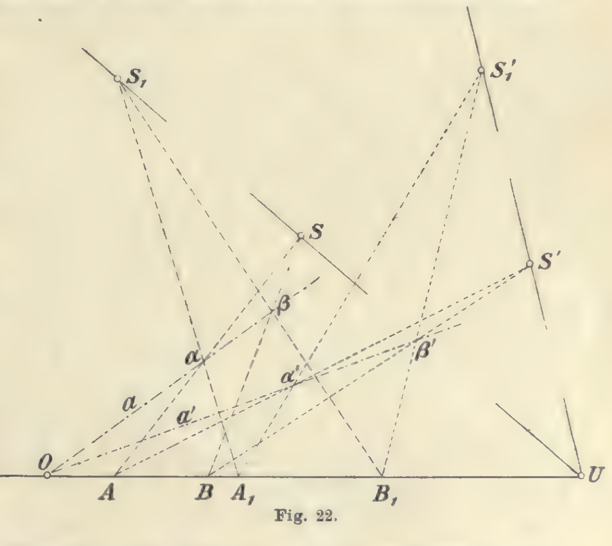


Fig. 22.

Soll in der zentralen Kollineation mit dem Zentrum U, der Achse a durch O und dem Bilde A_1 von A (Fig. 22) das Bild B_1 von B gefunden werden, so sucht man die Schnittpunkte α und β von a mit den Ge-

raden SA und SB, wo S ein beliebiger Punkt ist, schneidet $A_1\alpha$ mit US in S_1 und erhält in dem Schnittpunkte von g mit $S_1\beta$ den gesuchten Punkt B_1. Macht man nun die entsprechende Konstruktion für eine andre Achse a' durch O und einen andern Punkt S', so liegen sowohl die Dreiecke $\alpha\beta S$ und $\alpha'\beta' S'$ als die Dreiecke $\alpha S S_1$ und $\alpha' S' S_1'$ in bezug auf die Achse g perspektiv. Es laufen daher $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, SS' und $S_1 S_1'$ durch denselben Punkt, in bezug auf welchen auch die Dreiecke $\alpha\beta S_1$ und $\alpha'\beta' S_1'$ perspektiv liegen, so daß sich in der Tat $S_1\beta$ und $S'\beta'$ in demselben Punkte B_1 von OA_1 oder g schneiden. Stellen wir daher die Definition auf:

10. Definition. *Die Punktreihe $ABC \ldots\ldots$ einer Geraden g heißt* **projektiv ähnlich** *zu $A_1 B_1 C_1 \ldots\ldots$ in bezug auf das Deckelement U und den Nullpunkt O, in Zeichen $UOABC \ldots \sim UOA_1 B_1 C_1 \ldots$, wenn die Punkte $A_1 B_1 C_1 \ldots$ die Bilder von $ABC \ldots\ldots$ in einer zentralen Kollineation mit dem Zentrum U und irgend einer Achse durch O sind,* so gilt der Satz:

52. Satz. *Eine projektive Ähnlichkeit in bezug auf das Deckelement U und den Nullpunkt O ist vollständig bestimmt, wenn das Bild A_1 irgend eines Punktes A gegeben ist.*

Der Beweis des Fundamentalsatzes gelingt in diesem besonderen Falle ohne den Pascalschen Satz, weil die projektive Ähnlichkeit als Projektivität, die U, O, A in U, O, A_1 überführt, nicht in allgemeinster Weise zustande kommt.

Ebenso leicht ergibt sich der Satz:

53. Satz. *Durch die Aufeinanderfolge von zwei projektiven Ähnlichkeiten in bezug auf das Deckelement U und den Nullpunkt O entsteht eine ebensolche.*

Denn der Satz des Desargues lehrt unmittelbar, daß durch die Aufeinanderfolge zweier zentralen Kollineationen mit demselben Zentrum eine ebensolche mit einer Achse entsteht, die durch den Schnittpunkt der beiden gegebenen Achsen geht.

Dies vorausgesetzt können wir die Multiplikation projektiver Strecken folgendermaßen definieren:

11. Definition. *Wird die projektive Strecke (OE) als Repräsentant der Zahl 1 betrachtet, so heißt eine Strecke (OC)* **das Produkt** *der Strecke (OB) in die Strecke (OA), in Zeichen $(OA)\cdot(OB)=(OC)$, wenn $UOEB \sim UOAC$.*

Die so definierte Multiplikation von projektiven Strecken geht in der Tat in die gewöhnliche über, wenn g die euklidische Gerade ist und U ihr unendlich ferner Punkt, wie unmittelbar einleuchtet,

wenn man auch die zur Konstruktion dienenden Punkte S und S_1 ins Unendliche verlegt.

Von den Regeln der Multiplikation beweisen wir zuerst die Geltung des *assoziativen Gesetzes*. Setzen wir $(OA)\cdot(OB)=(OC_1)$ und $(OB)\cdot(OC)=(OA_1)$, so ist $UOEB \sim UOAC_1$ und $UOEC \sim UOBA_1$. Setzen wir ferner $(OC_1)\cdot(OC)=(OP)$ und $(OA)\cdot(OA_1)=(OP_1)$, so ist $UOEC\sim UOC_1P$ und $UOEA_1\sim UOAP_1$. Es ist daher einerseits $UOEBA_1 \sim UOAC_1P_1$ und andrerseits nach dem 53. Satze $UOBA_1\sim UOC_1P$, so daß in der Tat nach dem 52. Satze P mit P_1 zusammenfallen muß oder:

$$\{(OA)\cdot(OB)\}\cdot(OC)=(OA)\cdot\{(OB)\cdot(OC)\}$$

ist.

Was nun das *distributive Gesetz* betrifft, so müssen wir, da wir das kommutative Gesetz nicht voraussetzen wollen, deren zwei beweisen, je nachdem die beiden Summanden den ersten oder den zweiten Faktor gemein haben. Setzen wir also *zuerst*: $(OA)\cdot(OB)=(OB_1)$, $(OA)\cdot(OC)=(OC_1)$, $(OB)+(OC)=(OA_1)$, $(OA)\cdot(OA_1)=(OP)$ und $(OB_1)+(OC_1)=(OP_1)$, so ist: $UOEB\sim UOAB_1$, $UOEC\sim UOAC_1$, $UOEA_1\sim UOAP$; es ist daher auch die Reihe $UOEBCA_1\sim UOAB_1C_1P$. Deshalb wird diejenige zentrale Kollineation, welche die erste Reihe in die zweite überführt, diejenige Konstruktion, welche aus (OB) und (OC) deren Summe (OA_1) finden läßt, auch in diejenige verwandeln, welche aus (OB_1) und (OC_1) deren Summe (OP_1) ableitet. Daraus geht hervor, daß P_1 mit P zusammenfällt, oder daß die Gleichung gilt:

$$(OA)\cdot(OB)+(OA)\cdot(OC)=(OA)\{(OB)+(OC)\}.$$

Fig. 23.

Setzen wir *zweitens*: $(OA)\cdot(OC)=(OA_1)$, $(OB)\cdot(OC)=(OB_1)$, $(OA)+(OB)=(OC_1)$, $(OC_1)\cdot(OC)=(OP)$ und $(OA_1)+(OB_1)=(OP_1)$, so ist: $UOEC\sim UOAA_1$, $UOEC\sim UOBB_1$ und $UOEC\sim UOC_1P$. Vermittelt man die hieraus nach dem 53. Satze fließende

projektive Ähnlichkeit $UOAA_1 \sim UOBB_1$ durch die Achse $O\alpha\alpha_1$ und die Punkte S und T (s. Fig. 23), so führt eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum O, der Achse UST und α_1 als dem Bilde von α die Punkte $UOAB$ in UOA_1B_1 und deshalb auch die Summe (OC_1) von (OA) und (OB) in die Summe (OP_1) von (OA_1) und (OB_1) über, nämlich $\omega = (OS, U\alpha)$ in $\omega_1 = (OS_1, U\alpha_1)$ so zwar, daß ωB, $\omega_1 B_1$, αC_1 und $\alpha_1 P_1$ sich in V auf US schneiden. Deshalb ist auch $UOAA_1 \sim UOCP_1$, also nach dem Obigen auch $UOC_1P_1 \sim UOEC \sim UOC_1P$, so daß P mit P_1 zusammenfällt, es ist folglich auch:

$$(OA)\cdot(OC) + (OB)\cdot(OC) = \{(OA) + (OB)\}(OC).$$

Indem wir uns vorbehalten, in § 8 auszuführen, wie man auf das Bisherige ohne Benutzung des Fundamentalsatzes eine analytische Geometrie aufbauen kann, gehen wir endlich zur Untersuchung des *kommutativen Gesetzes der Multiplikation* über. Soll $(OA)\cdot(OB) = (OC) = (OB)\cdot(OA)$ sein, so finden wir der Definition gemäß C einerseits, indem wir E und B von S aus nach E' und B' auf a projizieren und dann B' von dem Punkte $T = (US, AE')$ nach C auf g (Fig. 24), andrerseits dadurch, daß wir E und A von S aus nach E' und A' auf a projizieren und dann wieder A' vom Punkte $V = (US, BE')$ nach C zurück. Wir haben daher das Sechseck $AA'CB'BE'$, dessen Seiten abwechselnd auf den Geraden g und a liegen, während die gegenüberliegenden Seiten sich in den Punkten S, V und T einer Geraden schneiden. Nun kann man in unserer Figur die Geraden g und a und auf ihnen die Punkte A, B, C und A', B', E' ganz willkürlich annehmen und die Punkte $S = (AA', BB')$, $T = (AE, CB')$, $U = (g, ST)$ und $E = (g, SE')$ daraus konstruieren. Gälte also auch bei solcher Wahl der Punkte U, O, E, A, B das kommutative Gesetz der Multiplikation projektiver Strecken, so müßten sich nach dem Obigen CA' und BE' im Punkte V auf ST schneiden, d. h. es würde ganz allgemein der sogenannte Pascalsche Satz (30. Satz) bestehen. Natürlich folgt auch umgekehrt aus dem

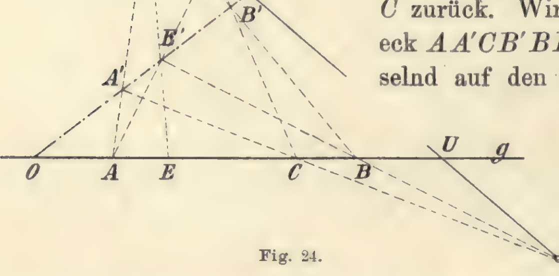


Fig. 24.

Pascalschen Satz das kommutative Gesetz der Multiplikation projektiver Strecken, und wir erhalten alles in allem auch hier das Resultat:

54. Satz. *Ein Produkt von beliebig viel projektiven Strecken ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren und genügt dem distributiven Gesetze in bezug auf die Addition mehrerer Produkte mit einem gemeinsamen Faktor.*

Auf die weitere Verfolgung des Umstandes, daß zum Beweise dieses Satzes die projektiven Postulate allein nicht ausreichen, werden wir in § 8 noch einzugehen haben. Im folgenden nehmen wir auch die Postulate der Bewegung an, setzen also auch den Pascalschen Satz oder das kommutative Gesetz der Multiplikation voraus und damit, wie wir gesehen haben, auch den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Hätten wir den letzten Satz von vornherein vorausgesetzt, so hätten die Beweise für die Gültigkeit der Regeln des Rechnens mit projektiven Strecken einfacher[1]) dargestellt werden können; für den später zu gewinnenden Einblick in den Zusammenhang der Axiome wird sich aber die hier gewählte Anordnung der Beweise[2]) als sehr wichtig herausstellen.

Aus der Definition der Multiplikation geht noch hervor, daß die Strecke (OE) der *Einheit* entspricht, weil $(OA) \cdot (OE) = (OA)$ ist; wir setzen deshalb auch $(OE) = 1$, weil die Multiplikation einer Strecke mit (OE) jene nicht ändert. Ebenso folgt, daß $(OA) \cdot (OO) = (OO) = 0$ ist, und die Erwägung, daß C nicht mit O zusammenfallen kann, ohne daß B nach O fällt, lehrt, daß ein *Produkt dann und nur dann Null wird, wenn ein Faktor Null ist.*

Die *Division* $(OC) = (OA) : (OB)$ ergibt sich der Definition gemäß durch Vertauschung von A mit C aus der projektiven Ähnlichkeit: $UOBE \sim UOAC$, d. h. werden B, E von S aus auf a nach B', E' projiziert und schneidet AB' die SU in T, so trifft TE' die g in dem Endpunkte C des Quotienten (OC). Je nachdem also B nach E, O oder U fällt, geht C in A, U oder O über. Da hiernach die Division durch (OU) die Nullstrecke ergibt, so entspricht U dem *unendlich fernen Punkte* der gewöhnlichen Streckenrechnung.

---

1) Vgl. F. Schur, Über die Grundlagen der Geometrie, Math. Ann. Bd. 55, S. 281 bis 285.

2) Die Möglichkeit, alle Rechnungsgesetze bis auf das kommutative Gesetz der Multiplikation ohne den Pascalschen Satz zu beweisen, hat zuerst Hilbert dargetan im V. Kap. der Grundlagen. Vgl. auch die Einleitung meines Lehrbuchs der analyt. Geometrie, Leipzig, 1898.

No. 21. Satz des Pappus. Involution. Da wir im folgenden den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie ohne jegliche Beschränkung voraussetzen wollen, so führen wir das übliche *Zeichen der Projektivität ein, d. h. wir setzen:* $ABCD\ldots \barwedge A'B'C'D'\ldots$, *wenn* in einer Projektivität den Punkten $ABCD\ldots$ der Geraden g die Punkte $A'B'C'D'\ldots$ derselben oder einer anderen Geraden g' entsprechen. Wir beweisen dann zuerst den folgenden wichtigen Satz:

55. **Satz.** *In derjenigen Projektivität einer Geraden g, durch welche den Punkten ABC die Punkte BAD zugeordnet sind, entspricht auch dem Punkte D der Punkt C, oder es ist, wenn A, B, C, D irgend vier Punkte einer Geraden sind, stets $ABCD \barwedge BADC$.*

Aus der Figur folgt nämlich unmittelbar (Fig. 25):

$$ABCD \text{ persp. } TUVD \text{ persp. } SWVC \text{ persp. } BADC.$$

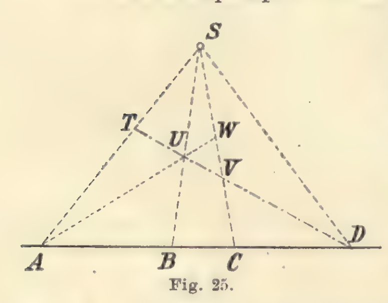


Fig. 25.

Es gibt also eine Projektivität, die $ABCD$ in $BADC$ verwandelt, sie ist folglich die nach dem Fundamentalsatze eindeutig bestimmte, bei der den Punkten ABC die Punkte BAD entsprechen.

Bei der oben entwickelten Rechnung mit projektiven Strecken waren der Unendlichkeitspunkt U, der Nullpunkt O und der Einheitspunkt E ganz beliebige Punkte einer Geraden. Wir werden daher je vier Punkten A, B, C, D einer Geraden eine projektive Strecke zu ordnen können, wenn wir etwa A als den Unendlichkeitspunkt, B als den Nullpunkt, C als den Einheitspunkt und D als den Endpunkt der Strecke betrachten oder in derjenigen Projektivität, in welcher den Punkten A, B, C die Punkte U, O, E derselben oder einer anderen Geraden zugeordnet sind, den dem Punkte D entsprechenden Punkt S aufsuchen. Wir werden also die so bestimmte Strecke (OS) mit $(ABCD) = (UOES) = (OS)$ bezeichnen können, wenn $ABCD \barwedge UOES$. Da ist es nun wichtig, den rechnerischen Ausdruck der projektiven Strecke $(ABCD)$ durch die Strecken kennen zu lernen, die die vier Punkte in Beziehung auf drei feste Elemente U, O, E derselben Geraden bestimmen.

Nach unsern neuen Festsetzungen können wir die Definition des Produkts (11. Def.) offenbar durch die Gleichung:

$$(1) \qquad (ABCD)\cdot(ABDF) = (ABCF)$$

zum Ausdrucke bringen; denn ist $(ABCG)$ der zweite Faktor, so

fordert diese Definition gerade, daß $ABCG \barwedge ABDF$ sein soll. Schreiben wir diese Gleichung in der Form:

$$(ABCD) = (ABCF) : (ABDF), \tag{2}$$

so folgt unter Benutzung des 55. Satzes:

$$\begin{aligned}(ABCD) &= (CDAB) = (CDAU) : (CDBU) \\ &= (AUCD) : (BUCD) = \frac{(AUCE)}{(AUDE)} : \frac{(BUCE)}{(BUDE)} \\ &= \frac{(UAEC)}{(UAED)} : \frac{(UBEC)}{(UBED)} = \frac{(AC)}{(AD)} : \frac{(BC)}{(BD)},\end{aligned} \tag{3}$$

wenn wir, wie im folgenden immer, die Angabe der Bezugselemente fortlassen, sobald die ein für allemal festgesetzten Punkte U, O, E gemeint sind (s. auch Gl. I auf S. 53). Wir können dies Resultat folgendermaßen formulieren:

56. Satz. *Sind auf einer Geraden g irgend drei Punkte U, O und E als Unendlichkeits-, Null- und Einheitspunkt einer projektiven Streckenrechnung gewählt, so bestimmen irgend vier andere Punkte A, B, C, D der Geraden dadurch eine projektive Strecke (OS), daß $UOES \barwedge ABCD$ gemacht wird, und es ist (OS) gleich dem Doppelverhältnis* $(ABCD) = \frac{(AC)}{(AD)} : \frac{(BC)}{(BD)}$ ***(Satz des Pappus).***

Als Spezialfall ergibt sich zugleich aus (3) die Formel:

$$(UABC) = \frac{(AC)}{(BC)}. \tag{II}$$

Aus dem 55. Satze können wir weitere Folgerungen ziehen, wenn wir ihn in folgender Form aussprechen:

57. Satz. *Ist eine Gerade so projektiv auf sich selbst bezogen, daß dem Bilde* ***eines*** *Punktes umgekehrt das Original als Bild zugeordnet ist, so gilt dasselbe für* ***jeden*** *Punkt; eine solche Projektivität heißt eine* ***Involution***. *Eine Involution ist durch zwei Paare zugeordneter Punkte bestimmt.*

Denn sind A, A_1 und B, B_1 zwei solche Paare, so ist die Involution oder involutorische Projektivität nach dem Fundamentalsatze dadurch eindeutig bestimmt, daß den Punkten AA_1B die Punkte A_1AB_1 zugeordnet sind, und dann entspricht nach dem 55. Satze dem Punkte B_1 auch B.

Eine solche involutorische Beziehung der Punkte einer Geraden haben wir z. B. auf jedem Strahle durch das Zentrum U einer kollinearen Spiegelung kennen gelernt. Schneidet der Strahl die Achse in O, so ist nach der 10. Definiton $UOAA_1 \sim UOA_1A$,

also auch $UOAA_1 \barwedge UOA_1A$ und nach dem 23. Satze sind A und A_1 harmonisch getrennt durch U und O. Denken wir uns umgekehrt die involutorische Projektivität dadurch bestimmt, daß

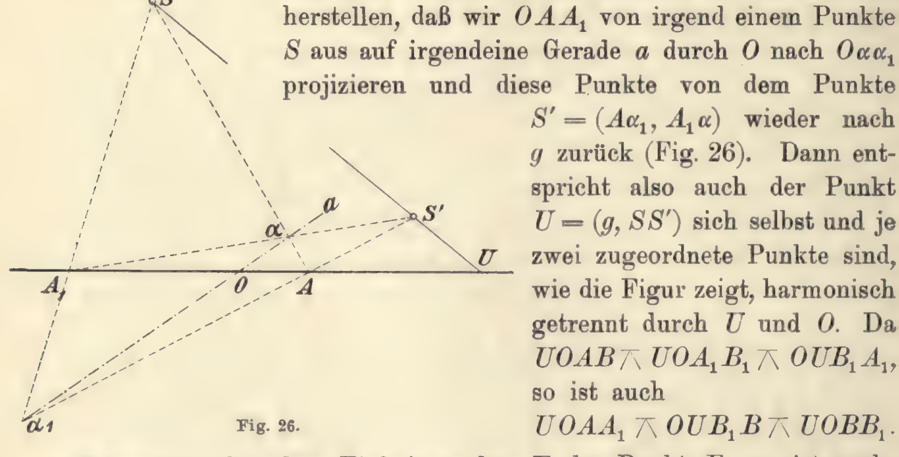


Fig. 26.

$OAA_1 \barwedge OA_1A$ sei, so können wir sie dadurch herstellen, daß wir OAA_1 von irgend einem Punkte S aus auf irgendeine Gerade a durch O nach $O\alpha\alpha_1$ projizieren und diese Punkte von dem Punkte $S' = (A\alpha_1, A_1\alpha)$ wieder nach g zurück (Fig. 26). Dann entspricht also auch der Punkt $U = (g, SS')$ sich selbst und je zwei zugeordnete Punkte sind, wie die Figur zeigt, harmonisch getrennt durch U und O. Da $UOAB \barwedge UOA_1B_1 \barwedge OUB_1A_1$, so ist auch

$UOAA_1 \barwedge OUB_1B \barwedge UOBB_1$.

Entspricht also dem Einheitspunkte E der Punkt E_1, so ist auch:

$$(UOAA_1) = (UOEE_1) = (OE_1) = -(OE) = -1$$

(vgl. Satz 60).

Wir erhalten so das Resultat:

58. Satz. *Besitzt eine Involution einen sich selbst zugeordneten Punkt O, so gibt es noch einen zweiten solchen Punkt U, ferner sind je zwei zugeordnete Punkte A, A_1 der Involution harmonisch getrennt durch U und O und die projektive Strecke $(UOAA_1)$ ist gleich -1. Umgekehrt bilden die durch zwei Punkte U und O harmonisch getrennten Punkte eine Involution mit den Deckelementen U und O.*

Eine Involution braucht aber keineswegs immer Deckelemente zu besitzen, wie uns eine andere Auffassung der Involution zeigt, die aus der Definition der Multiplikation fließt. Es war doch $(OA) \cdot (OB) = (OC)$, wenn $UOEB \barwedge UOAC$ ist. Da aber nach dem 55. Satze $UOAC \barwedge OUCA$ ist, so ist auch $UOEB \barwedge OUCA$ d. h. es sind U, O; A, B; E, C Punktepaare einer Involution. Haben wir umgekehrt drei Paare von zugeordneten Punkten einer Involution und fassen die Punkte eines Paares als Unendlichkeits- resp. Nullpunkt einer projektiven Streckenrechnung auf und einen der übrigen Punkte als Einheitspunkt, so bestimmt der zugeordnete Punkt eine Strecke, die dem Produkte der von den beiden letzten Punkten bestimmten Strecken gleich ist. Dies Resultat können wir so aussprechen:

59. Satz. *Sind der Unendlichkeits- und der Nullpunkt einer projektiven Streckenrechnung zugeordnete Punkte einer Involution, so hat das Produkt zweier Strecken vom Nullpunkte nach zugeordneten Punkten für alle Paare der Involution denselben Wert.*

Soll also eine so bestimmte Involution Deckelemente besitzen, so muß man B so bestimmen können, daß $(OA) \cdot (OB) = (OC)$ und $(OB) = (OA)$ ist.

No. 22. Positive und negative projektive Strecken. Um einzusehen, daß diese Aufgabe nicht in jedem Falle lösbar ist, nehmen wir jetzt an, daß U, O und E *eigentliche* Punkte seien so zwar, daß E auf der Strecke $\overline{OU}$ liegt, und nennen eine projektive Strecke (OA) *positiv* oder *negativ*, je nachdem A auf der Strecke $\overline{OU}$ liegt oder nicht; im zweiten Falle kann A auch ein uneigentlicher Punkt sein. Da jede projektive Strecke auf Grund des Fundamentalsatzes durch eine Strecke, die auf diese drei besonders gewählten Elemente bezogen ist, dargestellt werden kann, so gilt diese Unterscheidung auch für alle projektiven Strecken.[1]) Wir können aber auch sehen, daß diese Unterscheidung von der Wahl der drei eigentlichen Elemente U, O, E unabhängig ist. Denn werden drei eigentliche Punkte A, B, C, von denen B auf $\overline{AC}$ liegt, so nach A, B', C' projiziert, daß auch B' auf $\overline{AC'}$ liegt, so darf S, wenn er überhaupt ein eigentlicher Punkt ist, keinesfalls auf $\overline{CC'}$ liegen, weil sonst C und C' auf verschiedenen, also A und C' auf derselben Seite von BB' lägen. Ist daher D irgend ein Punkt von $\overline{AC}$, so wird er aus S nach einem Punkte D' von $\overline{AC'}$ projiziert. Denn sonst lägen A und C' auf derselben, also C und C' auf verschiedenen Seiten von SD, so daß S auf $\overline{CC'}$ liegen müßte. Setzen wir also $UOEA \barwedge U_1 O_1 E_1 A_1$, wo auch U_1, O_1, E_1 solche eigentliche Punkte sind, daß E_1 auf $\overline{O_1 U_1}$ liegt, so können wir diese Projektivität dadurch herstellen, daß wir zuerst $U_1 O_1 E_1 A_1$ aus $S = (UU_1, E'E_1)$, wo E' auf $\overline{O_1 U}$ liegt, nach $UO_1E'A'$ projizieren und darauf diese Punkte von $S_1 = (OO_1, EE')$ nach $UOEA$. Dann liegt nach dem Obigen jedesmal, wenn A_1 der Strecke $\overline{O_1 U_1}$ angehört, A' auf $\overline{O_1 U}$, also auch A auf $\overline{OU}$, und umgekehrt. Sollten die zweimal drei Punkte derselben Geraden angehören, so beweist man dasselbe durch Einschiebung von drei Punkten einer andern Geraden.

Nach unseren Festsetzungen entspricht nun jeder positiven

---

1) Mit diesen Sätzen der Anordnung werden wir uns in § 8 auch noch ohne Voraussetzung des Fundamentalsatzes beschäftigen.

Strecke (OA) eine ihr *entgegengesetzt gleiche* negative Strecke $(OA_1) = -(OA)$ so zwar, daß A_1 von A durch O und U harmonisch getrennt ist, und umgekehrt. Denn ist O' irgend ein Punkt der Strecke $\overline{OS}$ (Fig. 27), so haben die Strecken $\overline{SA}$ und $\overline{UO'}$ einen Punkt A' gemein und OA' enthält einen Punkt T der Strecke $\overline{US}$. Deshalb liegen U und O mit A' auf derselben Seite von $O'T$, so daß diese Gerade keinen Punkt der Strecke $\overline{OU}$ enthalten kann. Liegt umgekehrt A_1, wofern er überhaupt ein eigentlicher Punkt ist, nicht

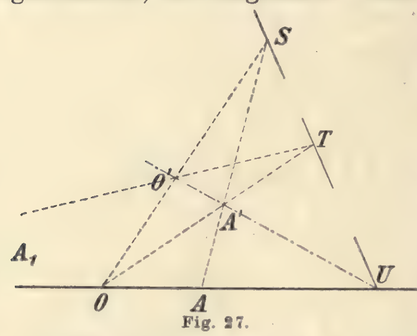


Fig. 27.

auf $\overline{OU}$, so liegen O und U jedenfalls auf derselben Seite von $O'A_1$. Ist also S irgendein Punkt auf der Verlängerung $\overrightarrow{OO'}$, so enthält die Strecke $\overline{SU}$ einen Punkt T von $O'A_1$, die Strecken $\overline{OT}$ und $\overline{UO'}$ haben einen Punkt A' gemein und SA' enthält einen Punkt A von $\overline{OU}$. Zugleich sieht man, daß UOA prosp. UA_1O ist oder $(OA) + (OA_1) = 0$ (vgl. S. 54). Gebrauchen wir also, wie gewöhnlich, das Zeichen $-$ *als Umkehrung des Zeichens* $+$, so können wir in der Tat setzen $(OA_1) = 0 - (OA) = -(OA)$. Stellen wir daher die Definition auf:

12. Definition. *Eine projektive Strecke $(ABCD)$ heißt* **positiv** *oder* **negativ**, *je nachdem bei Beziehung der ihr gleichen Strecke $(UOEF)$ auf solche eigentlichen Elemente, daß E anf der Strecke $\overline{OU}$ liegt, F dieser Strecke angehört oder nicht,*
so gilt zunächst der Satz:

60. Satz. *Das Vorzeichen einer projektiven Strecke ist unabhängig von der Wahl der eigentlichen Grundelemente, und jeder positiven Strecke entspricht eine ihr entgegengesetzt gleiche negative Strecke und umgekehrt so zwar, daß die Addition dieser beiden Strecken die Nullstrecke ergibt.*

Dies vorausgesetzt stellen wir die weitere Definition auf:

13. Definition. *Von zwei projektiven Strecken (OA) und (OB) heißt die zweite* **größer** *oder* **kleiner** *als die erste, in Zeichen $(OB) \gtrless (OA)$, je nachdem $(OB) - (OA)$ positiv oder negativ ist.*

Wir bemerken zuerst, daß die Summe (OB) zweier positiven Strecken (OA) und (OD) wieder positiv ist und größer als jeder der beiden Summanden. Denn beziehen wir die Strecken wieder auf

eigentliche Elemente und nehmen S_1 auf der zu O entgegengesetzten Seite der zur Konstruktion von B dienenden Geraden g' an (Fig. 28) so enthält die Strecke $\overline{OS_1}$ einen Punkt S' von g', $\overline{AS_1}$ einen Punkt O' von $S'U$ und OO' einen Punkt S von S_1U. Folglich haben die Strecken DS und $O'U$ einen Punkt D' gemein und S_1D' enthält den Punkt B der Strecke AU. Es liegt daher auch A auf OB und wir erhalten das Resultat:

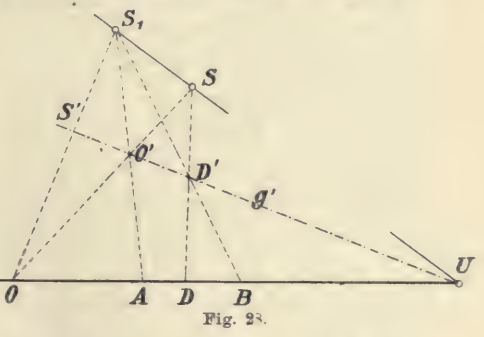


Fig. 28.

61. Satz. *Die Summe zweier positiven Strecken ist stets positiv und größer als jeder der beiden Summanden. Ist daher $(OC) > (OB)$ und $(OB) > (OA)$, so ist auch $(OC) > (OA)$. Werden die projektiven Strecken auf einen eigentlicken Null- und Unendlichkeitspunkt O und U bezogen und liegt der Einheitspunkt E auf $\overline{OU}$, so folgt für positive Strecken aus $(OB) > (OA)$, daß A auf OB liegt.*

Endlich können wir aus der zur Konstruktion des Produktes $(OC) = (OA) \cdot (OB)$ dienenden Figur (Fig. 29, die Buchstaben in Klammern entsprechen dem zweiten Falle) ersehen, daß das Produkt zweier positiven Strecken stets positiv ist. Wir können nämlich diese Figur so einrichten, daß nicht nur U, O, E, sondern alle ihre Punkte eigentliche werden. Je nachdem A auf der Strecke $\overline{OE}$ oder $\overline{EU}$ liegt (3. Postulat), braucht man S oder T nur auf der E entgegengesetzten Seite von a anzunehmen. Denn dann schneiden im ersten Falle SA und SE, im zweiten Falle TE und TA die a in zwei Punkten A' und E' so, daß A' auf $\overline{SA}$ resp. $\overline{TE}$ und $\overline{OW}$ (W auf a und $\overline{SU}$ resp. $\overline{TU}$) und E' auf $\overline{SE}$ resp. $\overline{TA}$ und $\overline{A'W}$ liegen. Folglich enthält nach dem 6. Postulat $AE'(EE')$ einen Punkt $T(S)$ der Strecke $\overline{SW}(\overline{TW})$. Sobald also B auf der Strecke $\overline{OU}$ liegt, ent-

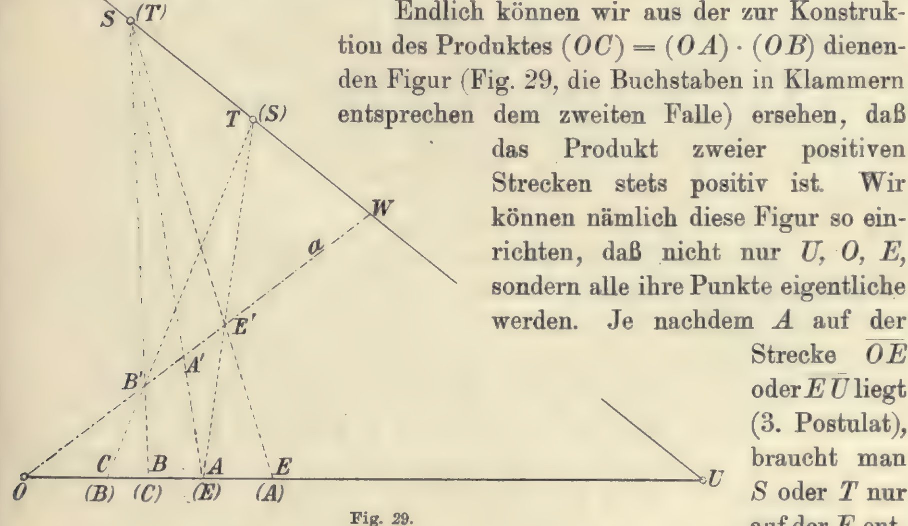


Fig. 29.

hält $\overline{SB}$ einen Punkt B' der Strecke $\overline{OW}$, also auch TB' einen Punkt C der Strecke $\overline{OU}$, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Man sieht aber auch, daß jedesmal, wenn C auf $\overline{OU}$ liegt, auch B es tun muß, d. h ein positives Produkt, von dem ein Faktor positiv ist, auch den anderen Faktor positiv haben muß. Sind ferner (OA) und (OB) negativ und (OA_1) und (OB_1) die ihnen entgegengesetzt gleichen Strecken, so sind A_1, B_1 von A, B resp. durch O und U harmonisch getrennt und es ist daher nach dem 58. Satze $UOAB_1 \barwedge UOA_1B \barwedge OUBA_1$, also nach dem 59. Satze $(OA) \cdot (OB) = (OA_1) \cdot (OB_1)$. Es ist demnach auch das Produkt zweier negativen projektiven Strecken positiv und wir erhalten den Satz:

62. Satz. *Das Produkt zweier projektiven Strecken ist positiv oder negativ, je nachdem die beiden Faktoren dasselbe Vorzeichen haben oder nicht.*

Hieraus geht hervor, daß eine durch die Punktepaare A, A_1; B, B_1 bestimmte Involution nur dann Deckelemente besitzen kann, wenn *das Doppelverhältnis* (AA_1BB_1) *positiv ist.* Zum Beweise dessen, daß sie dann auch immer zwei Deckelemente besitzt, bedürfen wir eines neuen Postulats, mit dem wir uns im nächsten Paragraphen beschäftigen wollen.

Mit den projektiven Strecken können wir nunmehr rechnen wie mit gewöhnlichen Strecken der euklidischen Geometrie oder mit Zahlengrößen, wovon wir im folgenden häufig Gebrauch machen werden.

No. 23. Die zu jeder Projektivität gehörige Involution. Analytische Darstellung der Projektivität. Zuvor aber wollen wir noch einige allgemeinere Eigenschaften der Projektivitäten einer Geraden g ableiten. Entsprechen in einer Projektivität $\mathfrak{P}$ von g den Punkten $A_0A_1B_0B_1$ die Punkte $A_1A_2B_1B_2$, so folgt aus $A_0A_1B_0B_1 \barwedge B_1B_0A_1A_0$ (55. Satz), daß $B_1B_0A_1A_0 \barwedge A_1A_2B_1B_2$, daß also A_1, B_1; A_0, B_2; A_2, B_0 Punktepaare einer Involution bilden. Ist daher B_1 von A_1 durch A_0 und A_2 harmonisch getrennt oder $A_0A_1A_2B_1 \barwedge A_2A_1A_0B_1$, so ist auch $A_0A_1A_2B_1 \barwedge B_0B_1B_2A_1$, es sind folglich auch A_0, B_0; A_1, B_1; A_2, B_2 Punktepaare einer Involution $\mathfrak{J}$. Nun ist klar, daß durch eine Involution eine Projektivität wieder in eine solche verwandelt wird. Denn ist vermöge der Projektivität $A_0B_0C_0D_0 \barwedge A_1B_1C_1D_1$ und bezeichnen wir die diesen Punkten in der Involution zugeordneten Punkte durch Striche, so ist $A_0'B_0'C_0'D_0' \barwedge A_0B_0C_0D_0 \barwedge A_1B_1C_1D_1 \barwedge A_1'B_1'C_1'D_1'$. Da aber

die Involution $\mathfrak{J}$ die drei Punkte A_0, A_1, B_0 und deren Bilder A_1, A_2, B_1 für $\mathfrak{P}$ in B_0, B_1, A_0 und ebenfalls deren Bilder B_1, B_2, A_1 verwandelt, so ordnet sie jedem Punkte C_0 und seinem Bilde C_1 für $\mathfrak{P}$ einen Punkt D_0 und sein Bild D_1 für $\mathfrak{P}$ zu, sie verwandelt mit anderen Worten die ganze Projektivität in sich. Ist also wiederum C_2 das Bild von C_1 für $\mathfrak{P}$, so ist ihm in $\mathfrak{J}$ auch das Bild D_2 von D_1 zugeordnet. Es ist daher einerseits $C_0 C_1 D_0 D_1 \barwedge C_1 C_2 D_1 D_2$ und anderseits $C_0 C_1 D_0 D_1 \barwedge D_0 D_1 C_0 C_1 \barwedge C_1 C_0 D_1 D_0$ (55. Satz), also sind nach dem 58. Satze auch C_1 und D_1 sowohl durch C_0 und C_2 als durch D_0 und D_2 harmonisch getrennt.[1]) Da offenbar jedes Deckelement der Involution $\mathfrak{J}$ zugleich ein solches der Projektivität $\mathfrak{P}$ ist und umgekehrt, so erhalten wir das folgende Resultat:

63. Satz. *Zu jeder Projektivität $\mathfrak{P}$ einer Geraden gehört eine solche Involution $\mathfrak{J}$, daß Deckelemente der einen auch solche der andern sind. Jedem Punkte A_1 ist in $\mathfrak{J}$ derjenige Punkt B_1 zugeordnet, welcher von ihm harmonisch getrennt ist durch das Bild A_2 von A_1 und den Punkt A_0, dessen Bild A_1 ist.*

Hiernach ist auch die Aufgabe, das *zwei Involutionen $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ von g gemeinsame Punktepaar zu finden* auf die andere zurückgeführt, die Deckelemente einer Involution zu konstruieren. Denn durch die Aufeinanderfolge der beiden Involutionen entsteht eine Projektivität, deren etwaige Deckelemente die Punkte jenes Paares sind und umgekehrt.

Wollen wir eine Projektivität $\mathfrak{P}$ der Geraden g rechnerisch darstellen, indem wir die entsprechenden Punkte P und P_1 durch die Strecken $(OP) = x$ und $(OP_1) = x_1$ auf die Grundelemente U, O, E beziehen, so können wir $\mathfrak{P}$ dadurch gegeben denken, daß diesen Elementen die Punkte U_1, O_1, E_1 mit den Strecken $(OU_1) = a$, $(OO_1) = b$, $(OE_1) = c$ entsprechen sollen. Dann folgt aus $(UOEP) = (U_1 O_1 E_1 P_1)$ und dem 56. Satze, daß:

$$x = \frac{c-a}{x_1 - a} : \frac{c-b}{x_1 - b},$$

oder:

$$xx_1(c-b) - xa(c-b) - x_1(c-a) + b(c-a) = 0,$$

oder:

$$(\mathfrak{P}) \qquad \alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0,$$

wenn $a = -\frac{\beta}{\alpha}$, $b = -\frac{\delta}{\gamma}$, $c = -\frac{\delta+\beta}{\gamma+\alpha}$ gesetzt wird und α, β, γ, δ

---

1) Zu diesem Beweise vgl. Segre, Sur les homographies bin. et leurs faisceaux, Journ. f. Math., 100, S. 321.

irgendwelche projektive Strecken bedeuten. Zugleich sieht man, daß $\beta = \gamma$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Projektivität eine Involution wird. Wir erhalten so den Satz:

64. Satz. *Sind P und P_1 entsprechende Punkte der Projektivität einer Geraden g, so besteht zwischen den projektiven Strecken $(OP) = x$ und $(OP_1) = x_1$ bezogen auf irgend welche Grundelemente U, O, E von g eine Gleichung der Form $\alpha x x_1 + \beta x + \gamma x_1 + \delta = 0$, und es stellt umgekehrt jede solche Gleichung eine Projektivität der g dar. Ist $\beta = \gamma$, so ist diese Projektivität eine Involution, und umgekehrt.*

No. 24. Projektivität zwischen Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln. Schließlich fügen wir noch die Definition der Projektivität von Strahlenbüscheln, die aus den Geraden einer Ebene durch je einen Punkt, dem Zentrum des Büschels, bestehen, hinzu, ohne wegen der Analogie dieser Betrachtungen mit denen bei Punktreihen auf die Beweise genauer einzugehen. Wir definieren:

14. Definition: *Ein Strahlenbüschel heißt perspektiv auf eine gerade Punktreihe bezogen, wenn jeder Strahl des Büschels, d. h. jeder Strahl durch das feste Zentrum des Büschels den entsprechenden Punkt der Punktreihe enthält.*

15. Definition: *Ein Strahlenbüschel (S_1) heißt projektiv auf eine gerade Punktreihe g_2 bezogen, wenn eine und folglich jede zu (S_1) perspektive Punktreihe g_1 auf g_2 projektiv bezogen ist* (vgl. 6. Def.).

16. Definition: *Zwei Strahlenbüschel heißen projektiv resp. perspektiv aufeinander bezogen, wenn sie auf eine und dieselbe gerade Punktreihe projektiv resp. perspektiv bezogen sind.*

Dann folgen aus dem Fundamentalsatze unmittelbar die Sätze:

65. Satz. *Ein zu einer geraden Punktreihe projektives Strahlenbüschel liegt perspektiv zu dieser, wenn drei Strahlen die entsprechenden Punkte enthalten.*

66. Satz. *Zwei projektive Strahlenbüschel sind perspektiv, wenn die Verbindungslinie der beiden Zentren sich selbst entspricht.*

Denn sie liegen nach dem 65. Satze beide perspektiv zur Verbindungslinie der Schnittpunkte von zweimal zwei entsprechenden Strahlen. Weiter ist klar:

67. Satz. *Die projektive Beziehung zwischen einem Strahlenbüschel und einer Punktreihe oder zwischen zwei Strahlenbüscheln ist vollkommen bestimmt, sobald drei Elementen des einen drei Elemente der resp. des andern zugewiesen sind.*

Von der Punktreihe können nunmehr auf das Strahlenbüschel alle die Eigenschaften der Projektivitäten dieses, insbesondere der

Involutionen und harmonischen Strahlen sowie das Rechnen mit projektiven Winkeln übertragen werden.

Einiger Erläuterung bedarf aber noch der Begriff der Projektivität zwischen zwei geraden Punktreihen, die *nicht in derselben Ebene liegen.* Zunächst können wir für eine solche Projektivität genau die 6. Definition auf S. 46 benutzen und die Sätze 43—47 wie dort beweisen. Der Beweis des 48. Satzes oder des *Fundamentalsatzes im Raume* ergibt sich daraus, daß eine Projektivität einer Geraden g, durch die den Punkten A, B, C die Punkte A', B', C' zugewiesen sind, jedenfalls unabhängig von der Ebene durch g ist, in der zu jedem vierten Punkt D der entsprechende D' konstruiert wird, da man die in der einen Ebene vollzogene Konstruktion durch Projektion von einem Zentrum aus auf die andere so übertragen kann, daß jede Gerade der zweiten Konstruktion sich mit der entsprechenden der ersten auf g schneidet. Daß die Projektivität innerhalb jeder solchen Ebene von der Wahl der Projektionszentren oder -achsen unabhängig ist, folgt ja aus dem 48. Satze selbst. Sind nunmehr auf zwei nicht in derselben Ebene gelegenen Geraden g_1 und g_3 den Punkten A_1, B_1, C_1 die Punkte A_3, B_3, C_3 als projektiv zugeordnet und C_2 irgendein Punkt auf der Geraden $g_2 = A_1B_3$, so erhalten wir eine solche Projektivität, wenn wir $S_1 = (B_1B_3, C_1C_2)$ und $S_2 = (A_1A_3, C_2C_3)$ setzen. Diese Projektivität ist aber unabhängig von der Wahl des Punktes C_2. Denn ersetzen wir C_2 durch C_2', also S_1 durch $S_1' = (B_1B_3, C_1C_2')$ und entsprechen dem Punkte D_1 auf g_1 die Punkte D_2 resp. D_2' auf g_2 und D_3 als Schnittpunkt von g_3 mit S_2D_2, so ist $A_1B_3C_2D_2 \barwedge A_1B_3C_2'D_2'$ innerhalb der Ebene $[g_1, g_2]$, also auch innerhalb der Ebene $[g_2, g_3]$, folglich auch $A_1B_3C_2'D_2' \barwedge A_3B_3C_3D_3$, so daß sich nach dem 44. Satze auch $C_2'C_3$ und $D_2'D_3$ in einem Punkte S_2' von A_1A_3 schneiden müssen. Da aber die so hergestellte Projektivität nach dem 45. Satze von der Wahl der g_1 und g_3 schneidenden Geraden g_2 unabhängig, so ist hiermit der Fundamensalsatz auch im Raume bewiesen. Wir wollen dies Resultat folgendermaßen formulieren.

68. Satz. *Definiert man die Projektivität zwischen zwei nicht in derselben Ebene gelegenen Geraden so wie in der 6. Definition, so ist auch eine solche Projektivität eindeutig bestimmt, wenn drei Punkten der einen Geraden drei Punkte der anderen als entsprechend zugewiesen sind.*

Da unserer Definition gemäß zwei Geraden projektiv aufeinander bezogen sind, wenn entsprechende Punkte in den Ebenen durch dieselbe Achse oder eines *Ebenenbüschels* liegen, so kann man auch

leicht die Begriffe der Projektivität zwischen Ebenenbüscheln, Strahlenbüscheln und Punktreihen wie in den Definitionen 14—16 erklären und die den Sätzen 65—66 entsprechenden Sätze ableiten. Wir bemerken hier nur, daß zwei projektive Ebenenbüschel stets im Sinne der 16. Definition auch perspektiv liegen, zu jeder Geraden nämlich, die drei Schnittlinien von dreimal zwei entsprechenden Ebenen und folglich jede solche Schnittlinie trifft. Wir kommen also hier wieder auf zwei Scharen von Geraden zurück, wie sie auf metrischer Grundlage im 3. Paragraphen die Quelle des Pascalschen und damit des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie bildeten. Im eigentlichen Sinne perspektiv nennt man freilich zwei projektive Ebenenbüschel nur dann, wenn ihre Achsen in einer Ebene liegen und diese sich selbst entspricht.

§ 5.

Die metrischen Grundformeln der nichteuklidischen Geometrie.

No. 25. Involution rechtwinkeliger Strahlen und konjugierter Punkte. Aus Rücksichten der Systematik haben wir im 3. Paragraphen als Grundlage der Maßgeometrie die Bewegung der ganzen Ebene oder des ganzen Raumes betrachtet und daraus den 35. Satz über kongruente Strecken abgeleitet. Bedenken wir aber die Wichtigkeit der Sätze über die Kongruenz der Dreiecke für die Elementargeometrie, so werden wir auch in unserer allgemeinen Geometrie diese Sätze untersuchen müssen. Wir beschränken uns da zuerst auf die sogenannten *rechtwinkeligen Dreiecke,* d. h. Dreiecke mit zwei aufeinander senkrechten Seiten, den *Katheten,* während die dritte *Hypotenuse* heißt. Dann gilt auch hier der Satz:

69. Satz. *Zwei rechtwinkelige Dreiecke ABC und $A'B'C$ ($AB \perp BC$ und $A'B' \perp B'C'$) sind einander kongruent, wenn die Katheten AB und $BC \simeq \overline{A'B'}$ und $B'C'$ resp. oder wenn die Hypotenuse $\overline{AC} \simeq \overline{A'C'}$ und die eine Kathete $\overline{AB} \simeq \overline{A'B'}$ ist.*

Der erste Teil des Satzes ergibt sich unmittelbar durch Ausführung derjenigen Bewegung, welche $A'B'$ in AB und $B'C'$ in BC verwandelt. Was aber den zweiten Teil betrifft, so denken wir zuerst diejenige Bewegung $\mathfrak{B}$ ausgeführt, welche $A'B'$ in AB und C' in einen Punkt C_1 verwandelt, der auf der andern Seite von AB liegt wie C. Dann ist BC_1, weil es auch senkrecht zu AB stehen muß (26. Satz), die Verlängerung von CB, die Umwendung $\mathfrak{U}$ also, die nach dem 12. Postulate $\overline{AC_1}$ und $\overline{AC}$ vertauscht, geschieht um die zu C_1C senkrechte Gerade, d. h. um AB. Wir sehen daher, daß die Aufeinanderfolge der beiden Bewegungen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{U}$ das Dreieck $A'B'C'$ in ABC verwandelt, daß diese beiden Dreiecke also kongruent sind.

Nun ist aber die konstruktive Ausführung dieser Bewegung durch die bisherigen Hilfsmittel, nämlich das Lineal und den

Streckenübertrager, nur im ersten Falle möglich, wenn die beiden Katheten des Dreiecks $A'B'C'$ gegeben sind. Ist aber die Hypotenuse und nur eine der beiden Katheten gegeben, so genügt offenbar der Streckenübertrager nicht, wir müssen vielmehr den Zirkel auch in voller Umdrehung benutzen können. Um das hierfür erforderliche Postulat scharf formulieren zu können, bedarf es einer genaueren Untersuchung von Größenbeziehungen zwischen den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks. Hierzu bietet die projektive Streckenrechnung eine Grundlage sehr allgemeiner Natur, wenn wir die Beziehungselemente in geeigneter Weise wählen.

Durch die absoluten Polaren, die wir im 26. Satze kennen gelernt haben, ist auf jeder Geraden eine gewisse Involution gegeben, die das Bindeglied zwischen den projektiven und den gewöhnlichen Strecken bildet. Nennen wir nämlich zwei Punkte A und A' *konjugiert*, wenn die absolute Polare des einen den andern enthält, so bilden die Paare konjugierter Punkte auf jeder Geraden eine Involution, die sogenannte *absolute Involution*. Der absolute Pol einer eigentlichen Geraden ist, wie wir gesehen haben, bestimmt durch alle zu der Geraden senkrechten Geraden, und die absolute Polare a eines eigentlichen Punktes A ist der Ort der absoluten Pole aller den Punkt enthaltenden Geraden. Der absolute Pol B jeder Geraden b durch A ist also der gemeinsame Punkt von a mit der Senkrechten AB in A auf b. Nun bilden aber die aufeinander senkrechten Geraden durch einen Punkt A eine Involution. Da man nämlich die Drehung $\mathfrak{D}$, die AB in die darauf senkrechte Halbgerade AC verwandelt, durch die Aufeinanderfolge der Umwendung um AB und derjenigen darstellen kann, welche AB und AC vertauscht, so entsteht durch zweimalige Anwendung dieser Drehung $\mathfrak{D}$ die Spiegelung an A. Stellt man daher die Drehung $\mathfrak{D}$ durch die Aufeinanderfolge der Umwendung um irgend eine Achse AP und derjenigen dar, welche AP mit der ihr vermöge der Drehung $\mathfrak{D}$ entsprechenden Halbgeraden AQ vertauscht, so muß diejenige Halbgerade, welche aus AQ durch die Umwendung um AP hervorgeht, durch die zweite Umwendung in das Komplement von AP verwandelt werden, also mit dem Komplemente von AQ zusammenfallen, d. h. es muß auch $AQ \perp AP$ sein. Die Drehung $\mathfrak{D}$, die als Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen eine Projektivität ist, ordnet also in der Tat jedem Strahle durch A den darauf senkrechten zu, ist also eine Involution. Da die Achse der Umwendung, die AB mit AC vertauscht, von dem auf ihr senkrechten Strahle durch AB

und AC harmonisch getrennt ist (23. Satz), so erhalten wir das folgende Resultat:

70. Satz. *Die Paare aufeinander senkrechter Strahlen eines Büschels bilden eine solche Involution, daß es zu jedem Paare ein zweites gibt, dessen Strahlen von denen des ersten harmonisch getrennt sind.*

Nach dem Obigen kann dieses zweite Paar jedesmal mit Hilfe des Lineals und des Streckenübertragers konstruiert werden.

Aus unserm Satze ergibt sich nun, daß die Beziehung zwischen der Geraden b durch einen eigentlichen Punkt A und ihren absoluten Polen B auf der absoluten Polare a von A eine projektive ist. Dasselbe gilt deshalb auch von der Beziehung zwischen den Punkten A einer eigentlichen Geraden b und ihren absoluten Polaren a. Denn diese entstehen auch als Verbindungslinien des absoluten Poles B von b mit den absoluten Polen der Strahlen CA durch irgend einen eigentlichen Punkt C. Da nun a jedesmal den A konjugierten Punkt A' auf b ausschneidet, so ist auch die Beziehung zwischen den Punkten A und A' eine Projektivität. Weil aber die absolute Polare von A durch A' geht, so ist die absolute Polare von A' die Senkrechte in A auf b, die deshalb zugleich auf $A'C$ senkrecht steht, also auch den Pol dieser Geraden enthält. Die projektive Beziehung zwischen den Punkten A und A' ist daher involutorisch. Hiermit ist also auf jeder eigentlichen Geraden b eine *absolute Involution* gegeben, die jedem eigentlichen Punkte A den Punkt A' auf der absoluten Polare des Punktes zuordnet. Deshalb sind A und A' auch harmonisch getrennt durch je zwei Punkte von b, die Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf A sind. Geht daher durch eine Bewegung die Gerade b in eine andre c über, so verwandelt sich auch die absolute Involution von b in diejenige von c. Die Involution als Projektivität weist natürlich auch *jedem* Punkte von b einen und nur einen Punkt zu, ohne daß hierbei die ursprüngliche Definition in Frage zu kommen braucht. Wir kommen auf diesen Punkt zurück und merken vorerst den Satz an:

71. Satz. *Ordnet man jedem eigentlichen Punkte A einer Geraden g denjenigen Punkt A' von g als* **konjugiert** *zu, welcher von ihm durch irgend zwei Punkte harmonisch getrennt ist, die Spiegelbilder von einander für A sind, geht also die absolute Polare von A durch A', so gehören die Paare konjugierter Punkte einer Involution an, der sogenannten* **absoluten Involution**[1]) *der Geraden, die bei jeder*

1) Vgl. F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, p. 573 ff. u. Pasch, a. a. O. p. 155 ff.

Bewegung in die absolute Involution der entsprechenden Geraden übergeht.

No. 26. Projektiver Abstand. Verallgemeinerung des pythagoraeischen Lehrsatzes. Nunmehr wollen wir, wenn es nicht anders angegeben ist, nur solche projektiven Strecken (OA) betrachten, für die der Null- oder Anfangspunkt ein eigentlicher Punkt O ist, der Unendlichkeitspunkt U der dazu konjugierte Punkt der Geraden OA und der Einheitspunkt E so gewählt ist, daß die Strecken $\overline{OE}$ für alle Geraden einander kongruent sind. Haben wir also eine andre Gerade OE_1U_1, so kann OEU durch eine Umwendung in OE_1U_1 übergeführt werden, so daß aus $(OA) = (OA_1)$ auch $\overline{OA} \sim \overline{OA_1}$ folgt. Sind ferner (OA) und (OB) positiv, so folgt *aus* $(OB) > (OA)$, *daß A auf $\overline{OB}$ liegt*, wofern B überhaupt ein eigentlicher Punkt ist. Dies folgt unmittelbar aus dem 61. Satze, wenn U ein eigentlicher Punkt ist. Ist aber U kein eigentlicher Punkt, also auch die absolute Polare von O keine eigentliche Gerade, so errichte man in O und E die Senkrechte auf OE und ziehe von irgend einem eigentlichen Punkte U' der letzteren die Senkrechte $U'S$ auf die erstere (Fig. 30) und erkennt dann leicht, daß die Strecken $\overline{OU'}$ und $\overline{SE}$ einen eigentlichen Punkt E' gemein haben; denn der durch die beiden Geraden OU' und SE bestimmte Punkt E' ist sowohl von O und U' als von S und E durch den Punkt auf der absoluten Polare von O, also je einen uneigentlichen Punkt harmonisch getrennt. Nunmehr ist klar, daß der Endpunkt A jeder positiven Strecke auf OE von S aus in einen Punkt A' auf OU' projiziert wird. Ist also (OB) $> (OA)$, also auch $(U'OE'B') > (U'OE'A')$, so liegt nach dem 61. Satze A' auf $\overline{OB'}$, folglich nach dem 6. Postulate auch A auf $\overline{OB}$. Stellen wir daher die Definition auf:

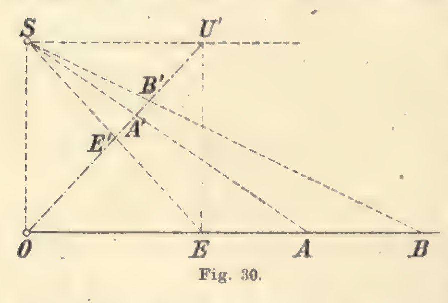


Fig. 30.

17. Definition. *Unter dem **projektiven Abstande** eines eigentlichen Punktes A von irgendeinem Punkte B versteht man die projektive Strecke $(\overline{AB}) = (A'ALB)$, wo A' der zu A konjugierte Punkt auf AB und $\overline{AL}$ der Längeneinheit $\overline{OE}$ kongruent ist, so zwar, daß (AB) positiv resultiert,*

so gilt der Satz:

72. Satz. *Ist der projektive Abstand* $(\overline{AB}) = (\overline{A_1 B_1})$, *so ist auch* $\overline{AB} \simeq A_1 B_1$ *und umgekehrt, und sind* A, B, C *solche eigentliche Punkte einer Geraden, daß* B *und* C *auf derselben Seite von* A *liegen und, falls der zu* A *konjugierte Punkt* A' *ein eigentlicher Punkt ist, auch* C *auf* AA', *so folgt aus* $(AC) > (AB)$, *daß* B *auf der Strecke* $\overline{AC}$ *liegt, und umgekehrt.*

Betrachten wir nunmehr das rechtwinkelige Dreieck $OBA(OB \perp BA)$, bezeichnen mit D den Fußpunkt der Senkrechten von B auf OA und mit B' und D' die aus B und D durch diejenige Umwendung hervorgehenden Punkte, welche die Halbgeraden OA und OB vertauscht, so ist, falls V der zu O konjugierte Punkt auf OB ist,

$$(UOAB') = (VOBD') = (UOB'D)$$

Fig. 31.

(Fig. 31) oder: $(OB') : (OA) = (OD) : (OB')$. Denn nach der Definition des Produkts (S. 56) ist $(OB) = (OA) \cdot (OC)$, wenn $(UOEC) = (UOAB)$ ist. Es ist folglich, wenn wir uns der *üblichen Schreibweise* bedienen:

$$\text{(K)} \qquad (OB)^2 = (OA) \cdot (OD),$$

worin wir eine bekannte Formel der euklidischen Geometrie nur in anderer Bedeutung wiederfinden.

Diese Formel wollen wir auf die beiden rechtwinkeligen Dreiecke $OQP(OQ \perp QP)$ und $ORP(OR \perp RP)$ anwenden, wo zugleich $OQ \perp OR$ sein mag. Sind Q' und R' die Fußpunkte der Senkrechten von Q und R auf OP, so folgt aus $(OQ)^2 = (OP) \cdot (OQ')$ und $(OR)^2 = (OP) \cdot (OR')$, daß

$$(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)\{(OQ') + (OR')\}$$

sein muß. Ist aber $OO' \perp OP$ und $RO' \perp OO'$ (Fig. 32), so schneiden sich die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ORO' und QPQ' auf der absoluten Polare UV von O. Es enthält daher $O'Q'$ den zu O konjugierten Punkt U auf OQ,

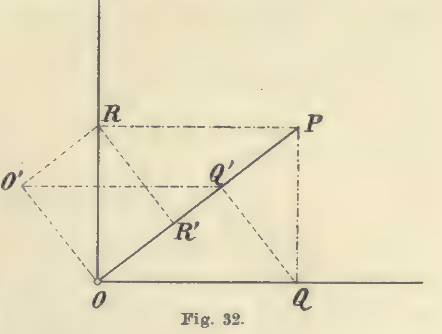


Fig. 32.

und es ist, weil auch $O'R$ den zu O konjugierten Punkt W auf OP enthält, WOR' prosp. $WQ'P$ (vgl. die 7. Definition auf S. 52),

also $(OQ') + (OR') = (OP)$. Demnach ergibt sich das Resultat, daß $(OQ)^2 + (OR)^2 = (OP)^2$ ist, worin wir eine *Verallgemeinerung des pythagoraeischen Lehrsatzes* sehen werden. Es ist aber wohl darauf zu achten, daß im allgemeinen (QP) keineswegs $= (OR)$ ist. Stellen wir die auch für die Folge wichtige Definition auf:

18. Definition. *Ist $OX \perp OY$, sind U und V die zu O konjugierten Punkte auf diesen Geraden und werden auf OX und OY einander kongruente Strecken $OE \simeq \overline{OF}$ angenommen, so versteht man unter der Abszisse und Ordinate eines Punktes P, von dem die Senkrechten auf OX und OY die Fußpunkte Q und R haben, die projektiven Strecken:*

$$x = (OQ) = (UOEQ) \quad \textit{und} \quad y = (OR) = (VOFR)$$

und nennt beide zugleich die **Koordinaten** *des Punktes P,* so können wir unser Resultat in folgender Form aussprechen:

73. Satz. *Der projektive Abstand eines eigentlichen Punktes O von irgend einem Punkte P, dessen Abszisse und Ordinate in Beziehung auf zwei zueinander senkrechte Achsen durch O (OQ) und (OR) sind, ist gegeben durch die Formel: $(\overline{OP})^2 = (OQ)^2 + (OR)^2$.*

Hieraus und aus dem 61. und 72. Satze ergibt sich in bekannter Weise:

74. Satz. *Trägt man die Hypotenuse OP eines rechtwinkligen Dreiecks OPQ auf die Halbgerade OQ nach $\overline{OS}$, so liegt Q auf der Strecke OS vorausgesetzt, daß S auf OU fällt, wo U der zu O konjugierte Punkt ist.*

No. 27. Gleichung der Geraden. Es ist nun auch leicht, die Bedingungen aufzustellen, der die Koordinaten x, y; x_1, y_1; x_2, y_2 von drei Punkten P, P_1, P_2 einer Geraden g genügen müssen. Ist nämlich W der Punkt von g auf der absoluten Polare UV von O, so ist $(WPP_2P_1) = (UQQ_2Q_1) = (VRR_2R_1) = \lambda$ oder nach dem 56. Satze (Formel (II)):

(1)
$$\lambda = \frac{x_1 - x}{x_2 - x} = \frac{y_1 - y}{y_2 - y},$$

oder:

(I)
$$x = \frac{x_1 - \lambda \cdot x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda \cdot y_2}{1 - \lambda},$$

oder:

(II)
$$x \cdot (y_2 - y_1) - y \cdot (x_2 - x_1) = x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2,$$

oder, wenn $(OA) = a$ und $(OB) = b$ die *projektiven Abschnitte* sind, die die Gerade auf OX und OY macht:

(III)
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Sind umgekehrt α, β und d irgend welche projektive Strecken, so liegt jeder Punkt P, dessen Koordinaten x, y der Gleichung:

$$\text{(IV)} \qquad \alpha \cdot x + \beta \cdot y = d$$

genügen, mit den Punkten A und B, deren Koordinaten $x = \frac{d}{\alpha}$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = \frac{d}{\beta}$ sind, in einer Geraden. Ist α oder $\beta = 0$, so steht die Gerade in B resp. A auf OY resp. OX senkrecht oder enthält überhaupt, falls A resp. B uneigentliche Punkte sein sollten, die Punkte U resp. V. Ist $d = 0$, so geht die Gerade durch O und den Punkt C auf der Senkrechten in E auf OX, dessen Ordinate $\gamma = -\frac{\alpha}{\beta}$ ist; wir wollen γ den *Richtungskoeffizienten* der Geraden (IV) nennen. Daß zwei Geraden A_1B_1 und A_2B_2, die einen Punkt W von UV gemein haben, in ihren Richtungskoeffizienten $-\frac{b_1}{a_1}$ und $-\frac{b_2}{a_2}$ übereinstimmen, folgt in der Tat unmittelbar aus der Projektivität $UOA_1A_2 \;\overline{\wedge}\; VOB_1B_2$. Geht aber auch OC durch W und schneidet A_1B_1 die EC in C_1, so folgt aus $UEOA_1 \;\overline{\wedge}\; VECC_1$, daß $1 - a_1 = (EC_1) : \gamma$, also, da $(EC_1) = \frac{b_1}{a_1}(a_1 - 1)$ und nach dem Vorigen a_1 als von 1 verschieden angenommen werden kann, $\gamma = -\frac{b_1}{a_1}$. Den Richtungskoeffizienten können wir daher als die jeden Punkt W von UV, der durch seine Koordinaten (OU) und (OV) nicht bestimmt ist, bestimmende projektive Strecke ansehen. Aus dem Beweisgange folgt auch umgekehrt, daß zwei Geraden, die in ihren Richtungskoeffizienten übereinstimmen, einen Punkt von UV gemein haben.

Indem wir uns im übrigen auf die besonders bezeichneten Gleichungen stützen werden, heben wir das folgende hervor:

75. Satz. *Jede Gerade wird durch eine Gleichung der Form $\alpha x + \beta y = d$ dargestellt, und es stellt umgekehrt jede solche Gleichung zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes eine gerade Linie dar, so zwar, daß alle Geraden, für die $\frac{\beta}{\alpha}$ oder der sogenannte Richtungskoeffizient derselbe ist, durch einen und denselben Punkt der absoluten Polare des Anfangspunktes O laufen, und umgekehrt.*

No. 28. Umwendung um eine Achse durch den Anfangspunkt. Drehung. Trigonometrische Funktionen des Winkels. Wir fragen nunmehr nach der *analytischen Darstellung der Umwendung* um eine Achse OC mit dem Richtungskoeffizienten γ. Dann ist das Zentrum S der kollinearen Spiegelung, als welche wir die Umwendung im 26. Satze kennen gelernt haben, der Punkt von UV

auf der zu OC senkrechten Geraden OC' mit dem Richtungskoeffizienten γ'. Nun schneiden aber die Paare aufeinander senkrechter Geraden durch O nach dem 70. Satze eine solche Involution aus, daß die beiden Punkte mit den Koordinaten $x = 1$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = -1$ zugeordnete Punkte sind. Es ist folglich nach dem 59. Satze $\gamma \cdot \gamma' = -1$. Zwischen zwei entsprechenden Punkten P und P' mit den Koordinaten x, y und x', y' besteht daher zuerst die Gleichung $y - y' = -\frac{1}{\gamma}(x - x')$ oder:

$$x' + \gamma y' = x + \gamma y. \tag{2}$$

Ferner schneiden die Geraden mit den Richtungskoeffizienten $\mu = \frac{y}{x}$ und $\mu' = \frac{y'}{x'}$ auf EV zwei Punkte M und M' aus, die durch C und C' harmonisch getrennt sind, so daß $(CC'MM') = -1$ ist (58. Satz). Hieraus folgt nach dem 56. Satze:

$$\frac{\gamma - \mu}{\gamma - \mu'} : \frac{\gamma' - \mu}{\gamma' - \mu'} = -1 \tag{3}$$

oder:

$$2\gamma(\mu\mu' - 1) + (1 - \gamma^2)(\mu + \mu') = 0 \tag{4}$$

oder:

$$2\gamma(xx' - yy') - (1 - \gamma^2)(xy' + yx') = 0. \tag{5}$$

Schreiben wir diese Gleichung in der Form:

$$x'(2\gamma x - (1 - \gamma^2)y) - y'(2\gamma y + (1 - \gamma^2)x) = 0, \tag{6}$$

so ergibt die Elimination von y' aus ihr und Gleichung (2):

$$x'(x + \gamma y)(1 + \gamma^2) = (x + \gamma y)((1 - \gamma^2)x + 2\gamma y), \tag{7}$$

also, sofern es sich um keinen Punkt von OC' handelt:

$$x' = \frac{1}{1 + \gamma^2}((1 - \gamma^2)x + 2\gamma y), \quad y' = \frac{1}{1 + \gamma^2}(2\gamma x - (1 - \gamma^2)y). \tag{V}$$

Diese Formel gilt aber für die Punkte von OC' oder für $x + \gamma y = 0$, weil sie dann in $x' = -x$ und $y' = -y$ übergeht, wie das dem Umstande entspricht, daß P und P' durch O und S harmonisch getrennt sein müssen.

Soll nunmehr eine *Drehung* ausgeführt werden, bei welcher der Punkt E in den Punkt E' mit den Koordinaten $x = \alpha$ und $y = \beta$ übergeht, so entsteht sie durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen an der Achse OX und an der Achse OC mit dem Richtungskoeffizienten γ, der nach (2) durch die Gleichung $\alpha + \gamma\beta = 1$ bestimmt ist, so daß $\gamma = \frac{1 - \alpha}{\beta}$ ist. Setzt man dies in die aus (V) hiernach hervorgehenden Formeln für die Drehung:

(8) $x' = \frac{1}{1+\gamma^2}((1-\gamma^2)x - 2\gamma y), \quad y' = \frac{1}{1+\gamma^2}(2\gamma x + (1-\gamma^2)y)$

ein, so ergeben sich, weil nach dem 74. Satze:

(VI) $$\alpha^2 + \beta^2 = 1,$$

also $1 + \gamma^2 = 2\frac{1-\alpha}{\beta^2}$ und $1 - \gamma^2 = 2\alpha\frac{1-\alpha}{\beta^2}$ ist, die Formeln für die Drehung um den Anfangspunkt in der bekannten Form:

(VII) $$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y;$$

denn sie sind auch für $\alpha = 1$ und $\beta = 0$ oder für den Fall der Identität richtig.

Wir erhalten daher das Resultat:

76. Satz. *Geht durch eine Drehung um den Anfangspunkt O, die den Punkt* $E(1, 0)$ *in den Punkt* $E'(\alpha, \beta)$ *verwandelt, der Punkt* $P(x, y)$ *in* $P'(x', y')$ *über, so ist* $x' = \alpha x - \beta y$, $y' = \beta x + \alpha y$, *wo* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, *und es wird umgekehrt durch die Gleichungen* (VII) *stets eine* **Drehung** *um O dargestellt, vorausgesetzt, daß* $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ *ist.*

Ist daher auch $(OP) = 1$, so können wir in den Formeln (VII) auch x und y als fest, α und β dagegen als veränderlich betrachten, so daß durch sie eine Drehung dargestellt wird, die OE in OP verwandelt. Dann lehren die Formeln, daß diese Drehung auch OE' in OP' überführt, daß also das Dreieck $EOE' \simeq POP'$ ist. Um dies Resultat auf einem für das folgende nützlichen Wege aussprechen zu können, führen wir den Begriff des *Winkels* durch die folgende Definition ein:

19. Definition: *Unter einem* **Winkel** $BAC = \sphericalangle(AB, AC)$ *versteht man eine der beiden Figuren, die aus allen Halbgeraden* $(A)P$[1]) *bestehen, die den Scheitel A des Winkels entweder mit den Punkten P einer Strecke* $\overline{BC}$ *zwischen irgend zwei Punkten der beiden Schenkel (Halbgeraden)* $(A)B$ *und* $(A)C$ *verbinden oder mit den Punkten der beiden Strecken* $\overline{DB}$ *und* $\overline{DC}$, *wo D auf der Verlängerung* $\overrightarrow{EA}$ *und E im Innern der Strecke* $\overline{BC}$ *liegt. Im ersten Falle heißt der Winkel* **konvex**, *im zweiten Falle* **konkav**. *Ist* $(A)C$ *die Verlängerung von* $(A)B$, *so heißt der Winkel ein* **gestreckter** *und besteht aus allen Halbgeraden durch A, die auf einer Seite der Geraden AB liegen. Fallen* $(A)B$ *und* $(A)C$ *zusammen, so ist der Winkel entweder Null oder ein* **voller**, *der aus allen Halbgeraden der Ebene durch A besteht*

1) Wir haben hier, um recht deutlich zu sein, für die Halbgerade, die alle mit P auf derselben Seite von A gelegenen Punkte enthält (4. Def. auf S. 28) das neue Zeichen $(A)P$ eingeführt.

Ist $AB \perp AC$, so wird der konvexe Winkel BAC ein **rechter** *Winkel (R) genannt.*

Nunmehr können wir das oben aus den Gleichungen (VII) gezogene Resultat folgendermaßen aussprechen:

77. Satz. *Je zwei Halbgeraden $(O)P$ und $(O)P'$, von denen die zweite aus der ersten durch dieselbe Drehung um O hervorgeht, bestimmen kongruente Winkel.*

Auf den Begriff des Winkels bauen wir weiter die folgenden Definitionen auf:

20. Definition: *Unter der Amplitude $\varphi = XOP$ eines Punktes P in bezug auf die beiden zueinander senkrechten Achsen OX und OY versteht man die Figur, die, je nachdem P mit OY auf derselben Seite von OX liegt oder nicht oder aber der Verlängerung $X\vec{O}$ angehört, aus dem konvexen oder konkaven oder dem OY enthaltenden gestreckten Winkel XOP und einem beliebigen Vielfachen des vollen Winkels um O besteht.*

21. Definition: *Die Summe $\psi = XOS$ der Amplituden $\varphi = XOP$ und $\varphi_1 = XOP_1$ oder $\psi = \varphi + \varphi_1$ ist die Amplitude, die aus φ und derjenigen Amplitude besteht, die aus φ_1 bei der Drehung von $(O)X$ nach $(O)P$ hervorgeht.*

Dann gilt zunächst der Satz:

78. Satz. *Die Summe zweier und mehrerer Amplituden ist unabhängig von der Reihenfolge der Summanden.*

Sind nämlich die beiden Punkte $P(x, y)$ und $P_1(x_1, y_1)$ so gewählt, daß $OP \simeq OP_1 \sim \overline{OE}$ ist, so folgt aus den Formeln (VII), daß der aus P_1 durch die Drehung, die $(O)E$ in $(O)P$ verwandelt, hervorgehende Punkt S die Koordinaten $x' = xx_1 - yy_1$, $y' = yx_1 + xy_1$ besitzt, so daß derselbe Punkt auch aus P durch diejenige Drehung hervorgeht, welche $(O)E$ in $(O)P_1$ verwandelt; es gilt daher das *kommutative Gesetz.* Ebenso beweist man, daß das *assoziative Gesetz* dieser Summation erfüllt ist.

Nunmehr können wir die *trigonometrischen Funktionen* in bekannter Weise definieren:

22. Definition: *Unter dem Kosinus resp. Sinus einer Amplitude $\varphi = XOP$ versteht man die Abszisse resp. Ordinate des Punktes P mit dem Radiusvektor $(\overline{OP}) = (OE) = 1$, oder in Zeichen:* $\cos\varphi = x = (OQ)$, $\sin\varphi = y = (OR)$.

Dann besitzen die so definierten trigonometrischen Funktionen in der Tat die bekannten Eigenschaften, insbesondere ist nach dem

73. Satze $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und es gelte infolge der Formeln (VII) das die *Additionstheoreme:*

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} \cos(\varphi + \varphi_1) = \cos\varphi\,\cos\varphi_1 - \sin\varphi\,\sin\varphi_1, \\ \sin(\varphi + \varphi_1) = \sin\varphi\,\cos\varphi_1 + \cos\varphi\,\sin\varphi_1. \end{cases}$$

Während es überflüssig ist, dies im einzelnen auszuführen, bedarf doch ein Punkt einer besonderen Aufklärung. Während nämlich jeder Amplitude projektive Strecken als Kosinus oder Sinus zugeordnet sind, bedarf es eines neuen Postulats, um zu jedem Kosinus oder Sinus, dessen absoluter Wert kleiner als Eins ist, eine zugehörige Amplitude zu finden. Es ist dies dasselbe Postulat, das wir schon am Anfange dieses Paragraphen im Auge hatten und am Schlusse ausführlicher behandeln wollen.

No. 29. Charakteristische Konstante $\mathfrak{K}$. Umwendung um eine zur Abszissenachse senkrechte Achse. Schiebung. Transformation der Koordinaten. Zunächst vervollständigen wir die den Betrachtungen des 3. Paragraphen parallelen analytischen Entwicklungen, indem wir den analytischen Ausdruck der *Umwendung um eine zur Achse OX senkrechte Achse MV* oder $x = m$ ableiten. Diese Umwendung ist eine kollineare Spiegelung in bezug auf die Achse MV und den zu M konjugierten Punkt W von OX; ist w die Abszisse dieses Punktes, so ist nach dem 59. Satze $m \cdot w = \mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{K}$ eine für unsere Geometrie *charakteristische Konstante* ist, die offenbar nur von der einmal gewählten Maßeinheit (OE) abhängt. Denn nach dem 71. Satze geht die absolute Involution jeder Geraden durch jede Bewegung in die absolute Involution der entsprechenden Geraden über, und ebenso bleibt unseren Voraussetzungen gemäß hierbei die Maßeinheit erhalten.

Sind überhaupt P_1 und P_2 mit den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 zwei konjugierte Punkte, geht also die absolute Polare von P_1, die ihrerseits die Punkte $\left(\frac{\mathfrak{K}}{x_1}, 0\right)$ und $\left(0, \frac{\mathfrak{K}}{y_1}\right)$ enthalten muß, durch P_2, so folgt aus Gleichung (II):

$$(9) \qquad x_2 \frac{\mathfrak{K}}{y_1} + y_2 \frac{\mathfrak{K}}{x_1} = \frac{\mathfrak{K}^2}{x_1 y_1}$$

oder:

$$(\text{IX}) \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 = \mathfrak{K}.$$

Wir erhalten daher das Resultat:

79. Satz. *Zwischen den Koordinaten x_1, y_1 und x_2, y_2 irgend zweier konjugierter Punkte der Ebene besteht die Gleichung* (IX), *wo $\mathfrak{K}$ eine für unsere Geometrie charakteristische Konstante ist.*

Die Konstante $\mathfrak{K}$ kann sowohl positiv als negativ als auch unendlich sein. Mit den hiernach möglichen verschiedenen Geometrien und mit dem Beweise, daß die bisherigen Postulate keinen Schluß auf den Wert dieser Konstanten gestatten, werden wir uns erst im nächsten Paragraphen beschäftigen.

Ist nunmehr P' die Umwendung von P, also auch Q' diejenige von Q, so ist $(WMQQ') = -1$, also nach dem 56. Satze:

$$\frac{w-x}{w-x'} = -\frac{m-x}{m-x'}, \tag{10}$$

oder:

$$2\mathfrak{K} - (m+w)(x+x') + 2xx' = 0. \tag{11}$$

Bezeichnen wir daher die Abszisse der Umwendung A von O mit a, so ist:

$$a = \frac{2\mathfrak{K}}{m+w} = \frac{2m}{1+\varkappa m^2}, \tag{12}$$

wo $1 : \mathfrak{K} = \varkappa$ gesetzt ist, und es folgt daher:

$$x' = \frac{a-x}{1-\varkappa a x}, \tag{13}$$

Doch ist der Schluß, daß durch diese Formel die Beziehung zwischen den Abszissen je zweier einander durch eine solche Umwendung zugeordneter Punkte dargestellt ist, welche O mit *irgend* einem eigentlichen Punkte A von OX vertauscht, nur erlaubt auf Grund des 13. Postulats auf S. 42 von der *Umkehrbarkeit der Strecke*, das wir bisher nur in § 3 zur Vervollständigung der Sätze über die Bewegungen, später aber nicht mehr brauchten; im besonderen ist der Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie unabhängig von jenem Postulate.

Auch die Form der Beziehung zwischen den Ordinaten y und y' der Punkte P und P' wird auf das 13. Postulat hinweisen. Wir finden diese Beziehung, wenn wir bedenken, daß P, P' und W in einer Geraden liegen, daß also nach (II):

$$(y'-y)w = xy' - yx', \tag{14}$$

oder (nach (10)):

$$y' = y\,\frac{w-x'}{w-x} = y\,\frac{x'-m}{m-x} \tag{15}$$

ist. Nach (12) und (13) ist aber:

$$\frac{x'-m}{m-x} = \frac{a(1+\varkappa m x)-(m+x)}{(m-x)(1-\varkappa a x)} = \frac{1}{1-\varkappa a x}\cdot\frac{1-\varkappa m^2}{1+\varkappa m^2}. \tag{16}$$

Nun ist der Definition gemäß:

$$1-\varkappa a^2 = \left(\frac{1-\varkappa m^2}{1+\varkappa m^2}\right)^2. \tag{17}$$

Verstehen wir daher wie gewöhnlich unter $\sqrt{S}$ *eine projektive Strecke, die der Gleichung* $s^2 = S$ *genügt*, so nehmen die *Formeln für die Umwendung* um die Achse $x = m$ die Gestalt:

$$x' = \frac{a - x}{1 - \varkappa a x}, \quad y' = y\,\frac{\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{1 - \varkappa a x} \tag{X}$$

an, wo die Wurzelgröße stets positiv zu nehmen ist und $a = \frac{2m}{1 + \varkappa m^2}$ ist. Daß zu jedem positiven S (vgl. Satz 62) eine und folglich zwei Größen $\sqrt{S}$ gehören, dürfen wir allerdings hier noch nicht schließen. Aber das 13. Postulat lehrt, daß jedenfalls $\sqrt{1 - \varkappa a^2}$ stets als die projektive Strecke $1 - \varkappa m^2 : 1 + \varkappa m^2$ mit Lineal und Streckenabtrager konstruiert werden kann, wo m die Abszisse des Mittelpunktes der Strecke $\overline{OA}$ ist (vgl. Satz 38). Auch werden wir sogleich noch eine zweite derartige Konstruktion von $\sqrt{1 - \varkappa a^2}$ kennen lernen.

Diese Formeln sind allerdings nur unter der Voraussetzung abgeleitet, daß $\varkappa$ von 0 verschieden ist. Sie gelten aber, wie leicht zu sehen ist, auch für $\varkappa = 0$. Dann fällt nämlich das Zentrum W der Kollineation mit U zusammen, so daß $(UMQQ') = -1$ wird, also in der Tat $x' = 2m - x$ ist; ebenso muß dann $y' = y$ sein, weil die Gerade PP' durch U läuft.

Man sieht zugleich, daß *für* $\varkappa = 0$ *das 13. Postulat eine Folge der übrigen Postulate ist.* Denn die Umwendung um die Senkrechte auf OX in dem vierten harmonischen Punkte M von U in bezug auf O und A vertauscht als kollineare Spiegelung die Punkte O und A (vgl. § 8).

Aus den Formeln für die Umwendung ist es zunächst leicht, die Formel für diejenige *Schiebung* längs der Achse OX abzuleiten, welche O in A überführt, da eine solche nach dem 39. Satze durch die Aufeinanderfolge der Umwendung an der Achse OY und der Umwendung (X) entsteht. Die *Formeln für diese Schiebung* lauten daher:

$$x' = \frac{a + x}{1 + \varkappa a x}, \quad y' = y\,\frac{\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{1 + \varkappa a x}. \tag{XI}$$

Ist daher a' die Abszisse des durch Verschiebung von A selbst entstehenden Punktes A', so folgt aus $\mathfrak{K} = \frac{a^2 a'}{2a - a'}$ *eine Konstruktion der Konstanten* $\mathfrak{K}$ mit Lineal und Streckenabtrager.

Denken wir uns bei dieser Schiebung das Koordinatenkreuz UOV nach UAV verschoben, so bedeuten offenbar x', y' die Koordi-

naten des Punktes P' im alten System uud x, y diejenigen im neuen. Hiernach erhalten wir das folgende Resultat:

80. Satz. *Der Punkt P mit den Koordinaten x, y in bezug auf die Achsen OX und OY besitzt die Beziehung auf die Achsen AU und AV, wo A auf OX im Abstande $(OA) = a$ liegt, die Koordinaten:*

$$x' = \frac{x - a}{1 - \varkappa a x}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{1 - \varkappa a x}. \tag{XII}$$

Setzt man hierin $x = a$ und $y = (OB)$, wo B der Fußpunkt der Senkrechten von dem Punkte C der Achse AU auf OY ist, so folgt hieraus, daß:

$$\sqrt{1 - \varkappa a^2} = (OB) : (AC) \tag{18}$$

ist, woraus ebenfalls hervorgeht, daß $\sqrt{1 - \varkappa a^2}$ eine positive projektive Strecke ist, die mit Hilfe des Lineals und des Streckenabtragers konstruiert werden kann.

Bedenken wir weiter, daß ebenso in den Formeln (VII) x', y' die Koordinaten des gedrehten Punktes P' in bezug auf die Achsen OX und OY und x, y die Koordinaten desselben Punktes in einem gegen das frühere um die Amplitude $XOX' = \varphi$ gedrehten Systeme $X'OY'$ bedeuten, wo $\cos\varphi = \alpha$ und $\sin\varphi = \beta$ ist, so ergeben sich, wenn wir auf diese Koordinatentransformation die vorige durch Verschiebung des Anfangspunktes O nach O' folgen lassen und $(OO') = r$ setzen, die Formeln:

$$x' = \frac{x\cos\varphi + y\sin\varphi - r}{1 - \varkappa r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}, \quad y' = \frac{(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)\sqrt{1 - \varkappa r^2}}{1 - \varkappa r(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}. \tag{19}$$

Setzen wir daher $r\cos\varphi = a$ und $r\sin\varphi = b$ (s. Gl. (I)), so erhalten wir das folgende Resultat:

81. Satz. *Der Punkt P mit den Kordinaten OX und OY besitzt in einem Systeme $O'X'Y'$, das durch Drehung von OX nach OO' und Schiebung von O nach dem Punkte O' mit den Koordinaten a, b entsteht, die Koordinaten:*

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{a(x-a) + b(y-b)}{\sqrt{a^2+b^2}\,(1 - \varkappa(ax+by))}, \\ y' &= \frac{a(y-b) - b(x-a)}{\sqrt{a^2+b^2}\,(1 - \varkappa(ax+by))}\sqrt{1 - \varkappa(a^2+b^2)}. \end{aligned}\right. \tag{XIII}$$

Hieraus ist es leicht, die Formeln für eine beliebige Koordinatentransformation der Ebene abzuleiten, wenn wir eine Drehung um O' hinzufügen, worauf wir nicht einzugehen brauchen.

Aus diesen Formeln und dem 73. Satze ergibt sich aber leicht der Ausdruck für den *projektiven Abstand zweier Punkte O' oder C und C_1* mit den Koordinaten a, b und a_1, b_1, nämlich:

$$\text{(XIV)} \qquad (\overline{CC_1})^2 = \frac{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 - \varkappa(ab_1 - ba_1)^2}{(1 - \varkappa(aa_1 + bb_1))^2},$$

die für $\varkappa = 0$ die bekannte Form annimmt.

No. 30. Trigonometrische Formeln der Dreieckslehre. Im Anschluß hieran ist es nicht schwer, die *trigonometrischen Formeln der Dreieckslehre* abzuleiten. Betrachten wir zuerst das rechtwinkelige Dreieck $ABC (AC \perp BC)$ und verstehen unter a, b, c die projektiven Abstände der Ecken (Fig. 33), so ist, wenn $AD \perp AC$ und $DB \perp AD$ gemacht wird, zunächst $c^2 = b^2 + (AD)^2$ und nach (XII) $(AD) = a\sqrt{1 - \varkappa b^2}$, also:

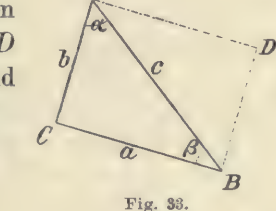


Fig. 33.

$$\text{(20)} \qquad c^2 = a^2 + b^2 - \varkappa a^2 b^2$$

oder:

$$\text{(21)} \qquad \sqrt{1 - \varkappa c^2} = \sqrt{1 - \varkappa a^2}\sqrt{1 - \varkappa b^2},$$

wo allerdings die zweite Form für $\varkappa = 0$ bedeutungslos wird. Weiter haben wir:

$$\text{(22)} \qquad b = c \cos \alpha,$$

wenn wir unter den Amplituden der Kosinus und Sinus die in der Figur bezeichneten konvexen Winkel verstehen und uns ihre etwaige Addition und Vergleichung an kongruenten Amplituden mit gemeinsamem Scheitel und Anfangsschenkel vorgenommen denken. Da ferner $c \sin \alpha = (AD) = a\sqrt{1 - \varkappa b^2}$ und auch $c \cos \beta = a$, so ist nach (21):

$$\text{(23)} \qquad \frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} \sin \alpha$$

und:

$$\text{(24)} \qquad \cos \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}}.$$

Haben wir nunmehr das beliebige Dreieck ABC, so ergibt die Anwendung der Formel (23) auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke ACD und BCD, wo CD die Senkrechte auf AB ist, unmittelbar den sogenannten *Sinussatz:*

$$\text{(XV)} \qquad \frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \sin \beta = \frac{b}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} \sin \alpha.$$

Nun ist ferner nach (XI):

(25) $$(AB) = \frac{(AD) + (DB)}{1 - \varkappa(AD) \cdot (DB)},$$

also:

(26) $$\frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} = \frac{1 + \varkappa(AD) \cdot (DB)}{\sqrt{1 - \varkappa(AD)^2}\sqrt{1 - \varkappa(DB)^2}},$$

oder, wenn wir $\sphericalangle ACD = \alpha_1$ und $\sphericalangle DCB = \beta_1$ setzen und zunächst D als auf $\overline{AB}$ gelegen voraussetzen, nach (20), (21) und (22):

(27) $$\frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} = \frac{1 - \varkappa(DC)^2}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}\sqrt{1 - \varkappa b^2}} + \varkappa \frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \frac{b}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} \sin \alpha_1 \sin \beta_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} - \frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \frac{b}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} (\cos \alpha \cos \beta_1 - \sin \alpha \sin \beta_1).$$

Somit erhalten wir den ersten *Kosinussatz* in der Form:

(XVI a) $$\frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} - \varkappa \frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} \frac{b}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} \cos \gamma.$$

Diese Formel wird allerdings für $\varkappa = 0$ bedeutungslos, aber dann ist es leicht, ihren Ersatz aus der ersten Form von (20), aus (22) und (23) in bekannter Weise abzuleiten.

Da ferner unter derselben Voraussetzung nach (XII) $(\overline{AD}) \operatorname{tg} \alpha = (\overline{DC})\sqrt{1 - \varkappa(\overline{AD})^2}$ und $(\overline{BD}) \operatorname{tg} \beta = (\overline{DC})\sqrt{1 - \varkappa(\overline{BD})^2}$ ist, so folgt aus (23) und (26):

(28) $$\cos \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sqrt{1 - \varkappa(AD)^2}\sqrt{1 - \varkappa(DB)^2}} \left(1 - \frac{(\overline{AD}) \cdot (\overline{DB})}{(DC)^2} (1 - \varkappa(DC)^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} \sin \alpha \sin \beta - \frac{(\overline{AD}) \cdot (\overline{DB})}{\sqrt{1 - \varkappa(AD)^2}\sqrt{1 - \varkappa(DB)^2}} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{(DC)^2},$$

also der *zweite Kosinussatz* in der Form:

(XVIb) $$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta,$$

eine Formel, die für $\varkappa = 0$ ausdrückt, daß *die Summe der drei Winkel ein gestreckter Winkel* ist. Schließlich ist es leicht, einzusehen, daß die Formeln auch gültig bleiben, wenn D auf einer der Verlängerungen von $\overline{AB}$ liegt.

Daß in der Tat diese Formeln die von uns gewählten Namen mit Recht führen, können wir an dieser Stelle, d. h. ohne Voraussetzung eines Stetigkeitsaxioms am besten daraus erkennen, daß wir sie auf *die Geometrie des Strahlenbündels* anwenden, d. h. die Strahlen eines Bündels als Punkte und seine Ebenen als Geraden betrachten. Dann gilt im Strahlenbündel erstens die projektive Geometrie, wie man am einfachsten daraus schließt, daß man die Strahlen des Bündels als Verbindungslinien seines Zentrums mit den Punkten

einer Ebene auffaßt, und zweitens gelten auch die Sätze über die Drehungen und Spiegelungen und die zueinander senkreckten Ebenen, wobei wir uns auch diese als aus der Raumgeometrie abgeleitet denken wollen, während wir von der selbständigen Begründung einer solchen Geometrie erst in § 7 handeln werden. Dann stehen offenbar je zwei konjugierte Strahlen aufeinander senkrecht, und je zwei Strahlen bestimmen nach Festsetzung einer gewissen Einheit einen projektiven Winkel. Wählen wir aber als diese Einheit den Winkel, den jeder Strahl mit der Achse derjenigen Umwendung bestimmt, welche den Strahl in den zu ihm senkrechten verwandelt, so ist der projektive Winkel der Tangens (sin : cos) des gewöhnlichen Winkels, und die charakteristische Konstante $\mathfrak{K}$ und deshalb auch $\varkappa$ hat den Wert -1. Denken wir uns nämlich in einem Strahlenbüschel OX und OY ($\perp OX$) als den Null- resp. Unendlichkeitsstrahl der projektiven Maßbestimmung und OG als den Einheitsstrahl, so daß G die Koordinaten $(OE) = (OF) = 1$ haben mag, so schneidet jeder Strahl OC des Büschels die EG in einem Punkt C, dessen Ordinate (OB) gleich dem projektiven Winkel (OX, OC) sein wird; (OB) aber ist $= (OC) \sin\gamma = (OE) \operatorname{tg}\gamma$, wenn $\sphericalangle XOC = \gamma$ gesetzt wird. Da der auf OG senkrechte Strahl die EG in einem Punkte mit der Ordinate -1 schneidet, so ist endlich auch $\mathfrak{K} = -1$. Demnach gehen in der Tat diese Formeln (XV) und (XVI) in den *Sinus- resp. Kosinussatz der sphärischen Trigonometrie* über. Daß freilich die von uns definierten trigonometrischen Funktionen mit den aus der Analysis bekannten übereinkommen, läßt sich trotz ihrer Übereinstimmung in allen elementaren Eigenschaften so lange nicht beweisen, als wir noch kein Stetigkeitsaxiom eingeführt haben. Jedenfalls aber gelten die Formeln der sphärischen Trigonometrie unabhängig von einer Annahme über den Wert der Raumkonstanten $\mathfrak{K}$ oder unabhängig vom Parallelenaxiom.

No. 31. Projektiver Abstand irgend zweier Punkte des Raumes. Schließlich bemerken wir, daß es nicht schwer ist, die von uns entwickelte allgemeine analytische Geometrie auf den *Raum* zu übertragen. Man wird auf drei zueinander senkrechte Achsen OX, OY, OZ die dem Punkte O konjugierten Punkte U, V, W als Unendlichkeitspunkte und drei Punkte E, F, G als Einheitspunkte so annehmen, daß $\overline{OE} \simeq \overline{OF} \simeq \overline{OG}$ ist, und als Koordinaten jedes Punktes P die projektiven Strecken $x = (UOEQ)$, $y = (VOFR)$, $z = (WOGS)$, wo Q, R, S die Fußpunkte der Senkrechten von P

auf OX, OY, OZ sind[1]. Dann beweist man zunächst die den Formeln (1) und (I) entsprechenden Formeln genau wie oben, indem man bedenkt, daß die auf einer der Achsen senkrechten Ebenen ein Büschel bilden, also die betrachtete Gerade und die Achse in projektiven Punktreihen schneiden (vgl. die Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen). Hieraus ergibt sich dann auch die Gleichung der Ebene in der bekannten Form:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{29}$$

wenn $a = (OA)$, $b = (OB)$, $c = (OC)$ die projektiven Abschnitte sind, die die Ebene auf den Koordinatenachsen macht. Weiter folgt durch zweimalige Anwendung des 73. Satzes, daß $(OP)^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Bezeichnet man daher als *Richtungskosinus* einer Halbgeraden durch O die Koordinaten desjenigen ihrer Punkte, welcher von O den projektiven Abstand 1 hat, so ist auch $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Sind daher $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ die Richtungskosinus der Senkrechten $(OD) = d$ von O auf die Ebene ABC, so ist $d = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma$. Sind weiter $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die Richtungskosinus von OP, so daß, wenn $(OP) = r$ gesetzt wird, $x = r\cos\lambda$, $y = r\cos\mu$, $z = r\cos\nu$ ist, so folgt wegen $d = r\cos(r, d)$ aus (29) die wichtige Formel:

$$\cos(d, r) = \cos\alpha\cdot\cos\lambda + \cos\beta\cdot\cos\mu + \cos\gamma\cdot\cos\nu. \tag{30}$$

Hieraus (ebenso übrigens auch durch dreimalige Anwendung der Formeln (VII)) findet man die Formeln für die Drehung des Koordinatensystems um den Anfangspunkt oder die sogenannte orthogonale Substitution in der bekannten Form (vgl. z. B. des Verf. Lehrbuch der analytischen Geometrie, Leipzig 1889, § 19), auf die hier einzugehen für uns keine Veranlassung vorliegt.

Die Formeln der Koordinatenverschiebung längs der Achse OX ändern sich im Raume gegen diejenigen der Ebene (XII) nur durch Hinzutritt der Gleichung $z' = \frac{z\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{1 - \varkappa a x}$. Aus beiden kann man den Formeln (XIII) analoge Formeln herleiten und daraus den Ausdruck für den *projektiven Abstand zweier Punkte*. Indessen kommen wir hierzu auch auf dem folgenden übersichtlicheren Wege. Zunächst ist klar, daß auch zwischen je zwei konjugierten Punkten P und P' des Raumes die Gleichung:

---

[1] Diese allgemeine Definition der Koordinaten verdankt man W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, 2. Aufl., Leipzig 1875, p. 549 u. 739.

$$(31) \qquad xx' + yy' + zz' = \mathfrak{K}$$

besteht. Soll dann der projektive Abstand $s = (\overline{P_1 P_2})$ durch die Koordinaten seiner Endpunkte ausgedrückt werden, so ist, wenn P_1' der zu P_1 konjugierte Punkt auf $P_1 P_2$ ist, nach der 17. Definition:

$$(32) \qquad s = (P_1' P_1 L P_2) = (UOES)$$

und $\overline{P_1 P_2} \simeq \overline{OS}$. Sind daher P_2' und S' die zu P_2 resp. S konjugierten Punkte auf $P_1 P_2$ resp. OX und T der Schnittpunkt von $P_1 P_2$ mit der Ebene UVW, so folgt (Gleichung (2) auf S. 61):

$$(33) \quad (SOUS') = (P_2 P_1 P_1' P_2') = \frac{(P_2 P_1 P_1' T)}{(P_2 P_1 P_2' T)} = \frac{(T P_1' P_1 P_2)}{(T P_2' P_1 P_2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

wo nach dem 56. Satze (Formel (II)):

$$(34) \qquad \lambda_1 = \frac{x_2 - x_1'}{x_1 - x_1'} = \text{usw.} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x_2 - x_2'}{x_1 - x_2'} = \text{usw.},$$

also nach (31):

$$(35) \quad \begin{cases} x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \mathfrak{K} = \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \mathfrak{K}), \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \mathfrak{K} = \lambda_2 (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \mathfrak{K}). \end{cases}$$

Da nun

$$(36) \qquad (SOUS') = (US'SO) = \frac{(OS')}{(OS') - (OS)} = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} - s^2},$$

so folgt:

$$(37) \qquad \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K} - s^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 - \mathfrak{K})^2}{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \mathfrak{K})(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - \mathfrak{K})},$$

also schließlich:

$$(\text{XVII}) \; s^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - \varkappa \{(x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2\}}{\{1 - \varkappa (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)\}^2}.$$

Obwohl die Ableitung dieser Formel für $\varkappa = 0$ nicht bestehen bleibt, so gilt sie doch auch in diesem Falle, wie sich aus den Formeln für die Koordinatenverschiebung ergibt. Außerdem ist zu bemerken, daß die Projektivitäten (32) und (33) das 13. Postulat zur Voraussetzung haben; denn nur auf Grund dieses Postulats konnten wir in § 3 beweisen, daß jede Bewegung durch die Aufeinanderfolge von Spiegelungen oder Projektionen hergestellt werden kann.

No. 32. Merkwürdige Punkte des Dreiecks. Die von uns entwickelte analytische Geometrie lehrt nun auch, daß das *absolute Polarsystem*, das zunächst jedem eigentlichen Punkte eine absolute Polare, die Achse der Spiegelung an diesem Punkte, und jeder eigentlichen Geraden einen absoluten Pol, das Zentrum der Spiegelung an dieser Geraden zuordnet, auch *jedem* Punkte (a, b) als Polare die Ge-

rade, deren Gleichung $ax + by = \mathfrak{K}$ ist, und *jeder* Geraden, die auf den Koordinatenachsen die Abschnitte a und b macht, einen Pol $\left(\frac{\mathfrak{K}}{a}, \frac{\mathfrak{K}}{b}\right)$ zuordnet. Ob aber jedem uneigentlichen Pol eine eigentliche Polare und jeder uneigentlichen Polare ein eigentlicher Pol zugehöre, darüber läßt sich im allgemeinen nichts aussagen (vgl. § 6). Wir können nur so viel sagen, daß für $\mathfrak{K} = \infty$ *jedem* Punkte eine und dieselbe absolute Polare UV und *jeder* Geraden ein absoluter Pol auf dieser Geraden zugehört, die natürlich keine eigentlichen Punkte enthalten kann. Denn sind A und A' irgend zwei Punkte von $OX = OU$, so gibt es stets eine Bewegung, die $\overline{AU}$ in $\overline{A'U}$ überführt; wäre also U ein eigentlicher Punkt, so müßte er von *allen* eigentlichen Punkten gleichen Abstand haben. Ferner bestimmen in diesem Falle *alle* Involutionen senkrechter Strahlen auf UV eine und dieselbe absolute Involution, was am einfachsten daraus folgt, daß die Formeln der gewöhnlichen analytischen Geometrie gelten. Im allgemeinen gilt jedenfalls dies, daß die absoluten Pole aller Geraden durch irgendeinen Punkt auf der absoluten Polare dieses Punktes liegen und die absoluten Polaren aller Punkte irgendeiner Geraden deren Pol enthalten.

Es kann dies benutzt werden, um über die Allgemeingültigkeit von bekannten Sätzen der Elementargeometrie zu entscheiden, also zu untersuchen, welche Sätze der Geometrie von den später noch einzuführenden Postulaten unabhängig sind. Daß dies von den metrischen Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks nicht gilt, haben wir gesehen, zugleich aber die allgemeineren Formeln kennen gelernt, die an Stelle der bekannten treten und diese enthalten. Andrerseits bleiben viele Eigenschaften des Dreiecks, z. B. diejenigen seiner *merkwürdigen Punkte* vollkommen erhalten. Fangen wir an mit dem *Höhenschnittpunkt* eines Dreiecks ABC. Wenn sich die beiden Höhen AA_1 und BB_1 in dem eigentlichen oder uneigentlichen Punkte H schneiden, so ist die Verbindungslinie der absoluten Pole $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dieser Höhen die absolute Polare von H, und es schneiden BC und AA_1, CA und BB_1 diese Polare in den Punktepaaren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ ihrer absoluten Involution. Dann sind aber auch die Schnittpunkte $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit AB und CH ein Paar dieser Involution. Denn es liegen von C aus perspektiv $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ zu $BA\mathfrak{C}C_1$, wenn mit C_1 der Schnittpunkt von AB mit CH bezeichnet wird, es ist ferner nach dem 55. Satze $BA\mathfrak{C}C_1 \barwedge ABC_1\mathfrak{C}$ und es liegen endlich diese Punkte

von H aus perspektiv zu $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$, so daß in der Tat $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ $\barwedge$ $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\mathfrak{C}$ ist. Demnach ist $H\mathfrak{C}'$ oder CC_1 die absolute Polare von $\mathfrak{C}$ oder $CC_1 \perp AB$, was zu beweisen war[1]).

Bezeichnen wir nunmehr die Mitten der Seiten AB und AC mit $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$, mit γ und β ihre vierten harmonischen Punkte in bezug auf die Ecken und setzen $(\beta\gamma, \mathfrak{b}\mathfrak{c}) = \alpha$ und $(\beta\mathfrak{c}, \gamma\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$, so lehrt die Betrachtung des Vierecks $\mathfrak{b}\mathfrak{c}\beta\gamma$ (vgl. Satz 22), daß die Gerade $\mathfrak{a}\alpha$ die Seiten AB und AC in den vierten harmonischen Punkten von A in bezug auf $\mathfrak{c}$, γ und $\mathfrak{b}$, β schneidet, also mit BC zusammenfällt. Zugleich sind $\mathfrak{a}$ und α durch B und C harmonisch getrennt. Daraus folgt, daß die absoluten Polaren von β und γ oder die Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ und $\overline{AB}$ auch auf $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ resp. $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ senkrecht stehen, daß also der Schnittpunkt M dieser beiden Mittelsenkrechten Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Demnach steht auch $\mathfrak{a}M \perp \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ und ist absolute Polare von α, so daß auch $\mathfrak{a}$ die Mitte von $\overline{BC}$ ist; denn da der der Geraden $\beta\gamma$ angehörige Punkt α nicht auf $\overline{BC}$ liegen kann, so muß $\mathfrak{a}$ dieser Strecke angehören. Hieraus folgt zunächst, daß *die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks denselben Punkt M gemein haben,* der aber auch ein uneigentlicher Punkt sein kann. Schneiden sich ferner die Mittentransversalen $B\mathfrak{b}$ und $C\mathfrak{c}$ in einem Punkte S, so schneidet nach dem 22. Satze die Gerade AS die BC in dem vierten harmonischen Punkte von α in bezug auf B, C, also in dem Mittelpunkte $\mathfrak{a}$ von BC. Es folgt also zweitens, daß *sich die drei Mittentransversalen eines Dreiecks in demselben natürlich eigentlichen Punkte S schneiden.* Bezeichnen wir endlich die Schnittpunkte der Höhen des Dreiecks ABC mit der Geraden $\alpha\beta\gamma$ durch α', β', γ', so gehen die drei Geraden AB, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ und $\alpha'\beta'$ durch denselben Punkt γ. Es liegen folglich die beiden Dreiecke $A\mathfrak{a}\alpha'$ und $B\mathfrak{b}\beta'$ perspektiv, so daß nach dem Desarguesschen Satze in einer Geraden liegen die Punkte $(A\mathfrak{a}, B\mathfrak{b}) = S$, $(A\alpha', B\beta') = H$ und $(\mathfrak{a}\alpha', \mathfrak{b}\beta') = M$. *Die drei merkwürdigen Punkte S, H, M liegen also in einer Geraden.* Wir wollen uns hiermit begnügen und verweisen für das Weitere auf eine Abhandlung von H. Schröter, Erweiterung einiger bekannter Eigenschaften des ebenen Dreiecks, Journ. f. r. u. a. Math., Bd. 68, p. 208 ff., deren weitere Entwicklungen auch für die

1) Wir bemerken, daß die vom Parallelenaxiome unabhängige Begründung des Satzes vom Höhenschnittpunkt aus demjenigen vom Schnittpunkte der Winkelhalbierenden keine Rücksicht darauf nimmt, daß H ein uneigentlicher Punkt sein kann. Vgl. z. B. Niewenglowski et Gérard, Cours de géométrie élémentaire, Géom. plane, Paris 1898, p. 78.

nichteuklidische Geometrie Anwendung finden können, weil für jedes einzelne Dreieck nur die absolute Involution auf der absoluten Polare von M, nicht aber das ganze absolute Polarsystem in Betracht kommt.

No. 33. Postulat der Zirkelkonstruktion. Wir kommen nun schließlich zu dem Postulate, das wir zur Konstruktion eines rechtwinkeligen Dreiecks, von dem die Hypotenuse und eine Kathete gegeben ist, brauchen. Wir können dies Postulat folgendermaßen aussprechen:

14. Postulat. *Sind O, A, B drei solche Punkte einer Geraden, daß A auf der Strecke $\overline{OB}$ liegt und, falls der zu O konjugierte Punkt U ein eigentlicher sein sollte, auch B auf der Strecke $\overline{OU}$, so gibt es auf jeder Seite von OA ein rechtwinkeliges Dreieck OAC, dessen Hypotenuse $\overline{OC} \simeq OB$ ist*[1]. (Vgl Satz 74.)

Auf die Unabhängigkeit dieses Postulats von den übrigen können wir erst in § 6 eingehen und bemerken hier nur so viel, daß in der Tat der Punkt C nicht mit Hilfe des Lineals und des Streckenabtragers allein konstruiert werden kann, sondern daß man sich hierzu des *Zirkels* bedient, dessen eine Spitze in O aufsteht, während die andre zuerst den Punkt B berühren muß und dann bei der Drehung um O die Senkrechte in A auf OA in zwei Punkten trifft. Auf Grund dieses Postulats kann nunmehr auch jede projektive Strecke, die größer als -1 und kleiner als $+1$ ist, als *Kosinus* resp. *Sinus* je zweier Amplituden betrachtet werden; die ersten beiden Amplituden ergänzen sich, wie bekannt, zu einem vollen und die zweiten beiden zu einem gestreckten Winkel.

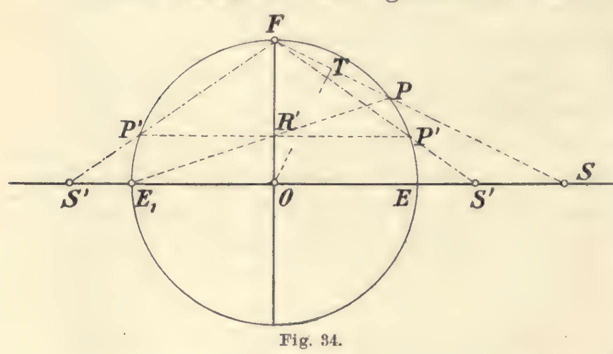


Fig. 34.

Aus unserm Postulate geht aber auch hervor, daß eine durch die Punktepaare A, A_1; B, B_1 bestimmte Involution stets zwei Deckelemente besitzt, wenn das Doppelverhältnis (AA_1BB_1) positiv ist, oder daß es stets zwei entgegengesetzt gleiche projektive Strecken η und $-\eta$ gibt, die der Gleichung $\eta^2 = \xi$ genügen. Be-

1) Vgl. Veronese, Elementi di geometria, p. 85.

ziehen wir nämlich die projektive Strecke $\xi = (OS)$ auf die eigentlichen Punkte O, E und den zu O konjugierten Punkt der Achse OX, so daß der Endpunkt E_1 der Strecke $(OE_1) = -1$ das Spiegelbild von E in bezug auf O ist, und machen auf der Senkrechten OY zu OX die Strecke $OF \simeq OE$, so enthält die Gerade FS (Fig. 34) noch einen zweiten Punkt P des Einheitskreises oder einen solchen Punkt, für den $\overline{OP} \simeq \overline{OE}$ ist. Die Koordinaten x, y von P, die den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{und} \quad x = \frac{\xi}{1-\lambda}, \; y = -\frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{38}$$

genügen, sind offenbar:

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2+1}, \; y = \frac{\xi^2-1}{\xi^2+1}, \tag{39}$$

so daß dieser Punkt auch ohne den Zirkel gefunden werden kann. Ist in der Tat T der Fußpunkt der Senkrechten von O auf FS, so ist ja $\overline{TP} \simeq FT$. Nun schneidet weiter die Gerade E_1F die Achse OY in einem Punkte R', dessen Ordinate $y' = (OR') = \frac{\xi-1}{\xi+1}$ ist, und hierzu gehören nach unserm Postulate dann und nur dann, wenn ξ positiv ist, zwei Punkte P' des Einheitskreises; denn dann und nur dann liegt R' auf der Strecke $\overline{FF_1}$, wo F_1 das Spiegelbild von F in bezug auf O ist. Die Abszissen x' dieser beiden Punkte P' sind offenbar $\pm \frac{2\sqrt{\xi}}{\xi+1}$, wenn wir $\eta = \sqrt{\xi}$ setzen. Es treffen daher schließlich die Geraden FP' die Achse OX in zwei Punkten S', deren Abszissen $(OS) = \pm \sqrt{\xi} = \pm \eta$ sind. Wir erhalten demnach das Resultat:

82. Satz. *Zu jeder positiven projektiven Strecke können mit Zirkel und Lineal zwei entgegengesetzt gleiche projektive Strecken konstruiert werden, deren Quadrat jener gleich ist.*

Sind nunmehr A, A_1; B, B_1 zugeordnete Punkte einer Involution und ist $(AA_1BB_1) \barwedge (UOES) = \xi > 0$, so entsprechen nach dem 59. Satze den beiden Punkten S', für die $(OS')^2 = OS$ ist, die beiden Deckelemente der Involution. Wir können daher in Ergänzung des 62. Satzes den Satz aussprechen.

83. Satz. *Die durch die Punktepaare A, A_1; B, B_1 bestimmte Involution besitzt dann und nur dann Deckelemente, wenn das Doppelverhältnis (AA_1BB_1) positiv ist; sie können mit Zirkel und Lineal konstruiert werden.*

Durch das 14. Postulat wird das dreizehnte über die Umkehrbarkeit der Strecke überflüssig. Denn danach gibt es auf der Achse OX stets zwei konjugierte Punkte M und W, die durch O und A

harmonisch getrennt sind; ihre Abszissen m und w sind nach Formel (12):

$$(40) \qquad m = \frac{1}{\varkappa a}\left(1 - \sqrt{1 - \varkappa a^2}\right), \quad w = \frac{1}{\varkappa a}\left(1 + \sqrt{1 - \varkappa^2}\right).$$

Daß in der Tat $1 - \varkappa a^2$ stets positiv ist, ist für ein negatives $\varkappa$ evident und folgt für ein positives $\varkappa$ daraus, daß dann $\sqrt{\mathfrak{K}}$ größer sein muß als die Abszisse jedes *eigentlichen* Punktes; denn nach dem 71. und 22. Satze kann ein eigentlicher Punkt niemals sich selbst konjugiert sein, so daß der Punkt mit der Abszisse $\sqrt{\mathfrak{K}}$ kein eigentlicher Punkt sein darf. Zugleich sieht man, daß:

$$(41) \qquad a - m = \frac{\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{\varkappa a}\left(1 - \sqrt{1 - \varkappa a^2}\right)$$

stets positiv, also M ein eigentlicher Punkt ist. Dasselbe folgt auch daraus, daß man M konstruieren kann als Schnittpunkt von OA mit der Geraden durch die Endpunkte von zwei kongruenten auf OA in O und A senkrechten, aber auf verschiedenen Seiten von OA liegenden Strecken. Wenn man aber auch M und ebenso W sehr wohl ohne Rücksicht auf das 13. oder das 14. Postulat konstruieren kann, so darf man doch für $\varkappa \gtrless 0$ ohne eines von beiden nicht schließen, daß M und W konjugierte Punkte seien, oder daß die kollineare Spiegelung in bezug auf W und die Senkrechte in M auf OA eine Umwendung sei. Jedenfalls haben wir bewiesen, daß *die Umkehrbarkeit der Strecke eine Folge des 14. Postulats ist*, und wir weisen zum Verständnis dieses Beweises nochmals darauf hin, daß wir zum Beweise des Fundamentalsatzes, also auch zur Begründung unserer analytischen Geometrie das 13. Postulat nicht benutzt haben.

No. 34. Kongruenz der Dreiecke. Konstruktion der Dreiecke aus gegebenen Seiten und Winkeln. Wie gestalten sich nun die *Kongruenzsätze der Dreiecke und die Konstruktion der Dreiecke aus gegebenen Seiten und Winkeln* in unserer allgemeinen Geometrie? Daß *zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel oder eine Seite und die beiden anliegenden Winkel entsprechend kongruent haben*, leuchtet ohne weiteres und ohne jede Einschränkung ein, ebenso wie ihre Konstruktion aus diesen Stücken mit Hilfe des Lineals und des Streckenabtragers, wobei wir es nur dahingestellt sein lassen müssen, ob in dem zweiten Falle der dritte Eckpunkt immer ein eigentlicher sei. Handelt es sich aber um die übrigen Kongruenzsätze, so bedarf es gewisser Ein-

schränkungen, zu deren kurzer Bezeichnung wir die folgenden bekannten Definitionen einführen:

23. Definition. *Eine Strecke $\overline{AB}$ heißt kleiner oder größer als die Strecke $A'B'$ oder ihr gleich, je nachdem bei einer solchen Bewegung, welche die Halbgerade $(A)B$ in $(A')B'$ verwandelt, der Punkt B auf die Strecke $\overline{A'B'}$ zu liegen kommt oder nicht oder mit B' zusammenfällt.*

Ebenso definieren wir, wenn wir uns im folgenden immer auf *konvexe* Winkel beschränken:

24. Definition. *Ein Winkel $A\widehat{B}C$ heißt kleiner oder größer als der Winkel $\widehat{A'B'C'}$ oder ihm gleich, je nachdem bei einer solchen Bewegung, welche die Halbgerade $(B)A$ und die Halbebene $(BA)C$ in $(B')A'$ und $(B'A')C'$ verwandelt, der Schenkel $(B)C$ in den Winkel $\widehat{A'B'C'}$ zu liegen kommt oder nicht oder mit $(B')C'$ zusammenfällt.*

Hiernach heißt bekanntlich ein Winkel *spitz* oder *stumpf*, je nachdem er kleiner oder größer als ein rechter Winkel ist.

Dies vorausgesetzt fragen wir nach dem Schnittpunkte C zweier Geraden AC und BC, die mit einer dritten Geraden AD gleiche Winkel bilden, so also, daß durch eine Schiebung längs der Geraden AD der Winkel DAC in DBC übergeführt werden kann. Da diese Schiebung durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ und um den Punkt B entsteht, bei der ersten Umwendung aber schon die Gerade AC in BC übergeht, so liegt C auf der absoluten Polare des Punktes M. Demnach ist die Senkrechte in M auf MC die absolute Polare von C. Nehmen wir daher an, daß C ein eigentlicher Punkt sei, so wird diese absolute Polare eine der beiden Strecken $\overline{AC}$ oder BC treffen, d. h. eine dieser beiden Strecken wird größer sein als die Strecke von jedem Punkte bis zu seiner absoluten Polare oder ihr gleich. Wir erhalten daher den Satz:

84. Satz. *Falls zwei Geraden AC und BC, die mit einer dritten Geraden AD oder BD gleiche Winkel bilden, einen eigentlichen Punkt C gemein haben, so ist eine der Strecken $\overline{AC}$ oder $\overline{BC}$ größer als die sogenannte* **absolute Strecke,** *d. h. die Strecke von jedem Punkte bis zu seiner absoluten Polare, oder ihr gleich.*

Schließen wir also solche Dreiecke aus, deren Seiten größer als diese absolute Strecke oder ihr gleich sind, was auch in Rücksicht auf unsere Definition des projektiven Abstands geboten ist, so sind offenbar auch *zwei Dreiecke kongruent, die eine Seite einen anliegenden*

und einen gegenüberliegenden Winkel entsprechend kongruent haben. Für die Konstruktion eines Dreiecks aus diesen drei Stücken bedürfen wir aber der Lösung der folgenden Aufgabe: *Auf einer Geraden g durch O die Punkte C zu finden, die von OX einen gegebenen senkrechten Abstand d haben.* Um diese Aufgabe auf allgemeine, d. h. auf eine von einer Annahme über den Wert von $\varkappa$ unabhängige Weise lösen zu können, ordnen wir jedem Pole P_1 mit der Abszisse $x_1 = (OQ_1)$ als Polare die Gerade zu, die auf Q_1P_1 in dem Punkte R_1 senkrecht steht, für den $(Q_1P_1)\cdot(Q_1R_1) = d^2$ ist, also die Gerade, deren Gleichung in bezug auf Q_1 als Anfangspunkt $y'y_1' = d^2$ ist, in bezug auf O als Anfangspunkt daher nach (XII):

$$\varkappa d^2 x x_1 + y y_1 = d^2. \tag{42}$$

Geht eine solche Polare durch den Punkt P, so geht umgekehrt die Polare von P durch P_1. Nennen wir also zwei solche Punkte konjugiert, so ist leicht zu sehen, daß die Paare konjugierter Punkte eine Involution bilden, so zwar, daß dem Punkte auf OX der Punkt der absoluten Polare zugeordnet ist. Schneidet daher die leicht zu konstruierende Polare irgend eines eigentlichen Punktes ε von g (Fig. 35) die g in δ und konstruieren wir die Punkte C der Figur 34 gemäß so, daß $(OC)^2 = (O\varepsilon)\cdot(O\delta)$ wird, so sind C die gesuchten Punkte. Die Reellität dieser Lösung hängt offenbar davon ab, daß $(O\delta):(O\varepsilon)$ oder auch das Produkt der Abszissen von δ und ε positiv ist. Nun ist dieses Produkt, falls γ die Amplitude von g ist, nach (42) $d^2 : \varkappa d^2 + \operatorname{tg}^2\gamma$, ist also für $\varkappa >= 0$ stets positiv, aber für $\varkappa < 0$ nur dann, wenn $d \cot\gamma < \sqrt{-\mathfrak{K}}$ ist. Hier ist $d\cot\gamma$ die

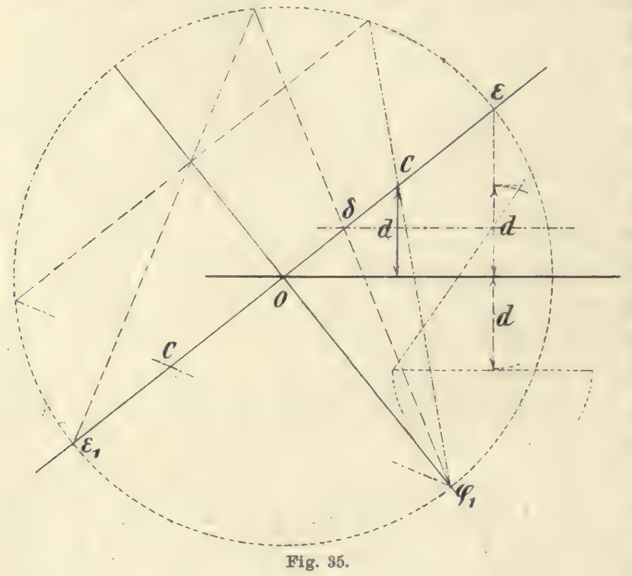


Fig. 35.

Abszisse des Schnittpunktes von g mit der auf OX in D senkrechten Geraden, wenn $(OD) = d$ ist, und $\sqrt{-\mathfrak{K}}$ kann nach Fig. 34 gefunden werden, wenn man unter FS die Senkrechte von F auf die Senkrechte von OE_1 in E_1 versteht. Aber auch wenn die Reellität der Lösung angenommen werden darf, so läßt sich doch im allgemeinen darüber nichts aussagen, ob C eigentliche Punkte seien. Mit dieser Aufgabe ist auch die andre gelöst, *die projektive Strecke $a = (OA)$ zu konstruieren, die der Gleichung $\frac{a}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}} = d$ genügt*; denn dann braucht g nach (XII) nur die Halbierungslinie der Winkel XOY zu sein. Hieraus ergibt sich für $\varkappa \geqq 0$ die projektive Strecke a immer reell, für $\varkappa < 0$ aber nur dann, wenn $d < \sqrt{-\mathfrak{K}}$.

Zur Behandlung der übrigen Kongruenzsätze weisen wir zuerst darauf hin, daß — immer unter der Voraussetzung von Dreiecken, deren Seiten kleiner als die absolute Strecke sind — nach dem 74. Satze die Katheten jedes rechtwinkligen Dreiecks kleiner sind als die Hypotenuse. Definiert man daher als *Summe zweier Strecken* $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ derselben Halbgeraden die Strecke $\overline{OC}$, deren Endpunkt C aus A durch diejenige Schiebung längs der Geraden entsteht, die O in B überführt, so folgt leicht, daß die Summe zweier Strecken größer ist als jeder der beiden Summanden, und aus der Umkehrbarkeit der Strecke, daß diese Summation dem kommutativen Gesetze gehorcht (die Geltung des assoziativen Gesetzes ist ja evident). Daraus beweist man durch Betrachtung rechtwinkeliger Dreiecke in bekannter Weise, daß *die Summe zweier Seiten eines Dreiecks stets größer, also die Differenz der kleineren von der größeren kleiner ist als die dritte.* Hieraus wiederum folgt, daß *in jedem Dreiecke dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüberliegt und umgekehrt.* Denn ist im Dreiecke $ABC \sphericalangle BAC > ABC$, so wird der Schenkel AD des Winkels $BAD \cong ABC$ einen Punkt D der Seite $\overline{BC}$ enthalten, es ist also $\overline{BC}$ oder die Summe von $\overline{BD}$ oder $\overline{AD}$ und $\overline{DC}$ größer als $\overline{AC}$. Endlich ergibt sich aus dem 84. Satze, daß *in jedem Dreiecke höchstens ein Winkel ein rechter oder ein stumpfer sein kann.*

Nunmehr kann der sogenannte dritte Kongruenzsatz, wonach *zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie zwei Seiten und den der größeren gegenüberliegenden Winkel entsprechend kongruent haben,* leicht bewiesen werden. Denn ist $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\sphericalangle BAC = B'A'C'$ und $\overline{BC} > \overline{AC}$, so daß $\sphericalangle ABC < \sphericalangle BAC$ kein stumpfer Winkel sein kann, und fiele bei derjenigen Bewegung, die $\overline{AC}$ in

$\overline{A'C'}$ und die Halbgerade AB in $A'B'$ überführt, B nicht nach B', sondern nach B_1 auf $\overline{A'B'}$, so würde aus der Gleichheit der Winkel $C'B'B_1$ und $C'B_1B'$ folgen, daß $\sphericalangle A'B_1C'$ ein stumpfer Winkel wäre, also auch $\sphericalangle ABC$, gegen die Voraussetzung. Die Konstruktion eines solchen Dreiecks ist nun leicht nach dem 14. Postulate auszuführen, da aus $\overline{AC} < \overline{BC}$ a fortiori folgt, daß die Senkrechte von C auf AB kleiner als $\overline{BC}$ ist.

Auch der sogenannte vierte Kongruenzsatz, wonach *zwei Dreiecke kongruent sind, die drei Seiten entsprechend kongruent haben,* folgt daraus, daß man zuerst das eine Dreieck durch eine Bewegung in ein Dreieck $A'B'C_1$ überführt, das mit dem andern Dreiecke $A'B'C'$ die eine Seite $\overline{A'B'}$ derart gemein hat, daß C' und C_1 auf verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegen. Dann muß die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen, die erstens $\overline{A'C'}$ und $\overline{A'C_1}$ und zweitens $\overline{B'C'}$ und $\overline{B'C_1}$ vertauschen, die Identität ergeben. Daß aber ein Dreieck ABC aus drei gegebenen Seiten $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CA} = \bar{b}$, $\overline{AB} = \bar{c}$ stets dann konstruiert werden kann, wenn $\bar{a} + \bar{b} > \bar{c}$ und $|\bar{a} - \bar{b}| < \bar{c}$ ist, folgt aus dem ersten Kosinussatz und dem 14. Postulate. Nach Formeln, die den Gleichungen (25) und (26) analog zu bilden sind, findet man nämlich, daß unsere Bedingungen gleichbedeutend sind mit:

$$(43)\qquad \frac{1 - \varkappa ab}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}\sqrt{1 - \varkappa b^2}} \gtrless \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} \gtrless \frac{1 + \varkappa ab}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}\sqrt{1 - \varkappa b^2}},$$

je nachdem $\varkappa$ positiv oder negativ ist, oder mit:

$$(44)\qquad \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \varkappa b^2}} \right| < \frac{\varkappa ab}{\sqrt{1 - \varkappa a^2}\sqrt{1 - \varkappa b^2}},$$

wo die geraden Klammern die absoluten Werte der eingeschlossenen Strecken bedeuten. Diese Ungleichung besagt aber, daß der aus ($\mathrm{XVI^a}$) sich ergebende Wert von $\cos\gamma$ dem absoluten Werte nach < 1 ist, so daß nach dem 14. Postulate in der Tat ein ihm zugehöriger konvexer Winkel γ gefunden werden kann. Für $\varkappa = 0$ folgt das Entsprechende leicht aus dem bekannten Kosinussatz. Ist einmal die Existenz eines Dreiecks mit gegebenen Seiten nachgewiesen, so erfolgt seine Konstruktion mit Zirkel und Lineal in bekannter Weise. Es ergibt sich hieraus zugleich ein Satz über die Schnittpunkte zweier Kreise, auf den wir aber nicht eingehen wollen.

In unserer allgemeinen Geometrie müssen wir aber noch auf einen fünften Kongruenzsatz eingehen, wonach *zwei Dreiecke kongruent sind, wenn sie die drei Winkel entsprechend kongruent haben.*

Falls nämlich bei derjenigen Bewegung, welche die Halbgeraden $(A)B$ und $(A)C$ in $(A')B'$ und $(A')C'$ überführt, B nicht nach B' fiele, sondern nach B auf $A'B'$, so fiele auch C in einen von C' verschiedenen Punkt C_1. Dann wäre nach dem 84. Satze die Verbindungslinie der voneinander verschiedenen Mitten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Strecken B_1B' und C_1C' die absolute Polare des durch $B'C'$ und B_1C_1 bestimmten Punktes, es müßten denn die absoluten Polaren von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zusammenfallen oder $\varkappa = 0$ sein. Sehen wir von diesem Falle ab, in dem unser Kongruenzsatz *nicht* gilt (vgl. den Schluß des nächsten Paragraphen), so müßte also, wenn B_1 nicht mit B' zusammenfiele, der durch die Geraden $B'C'$ und B_1C_1 bestimmte Punkt alle Senkrechten zu der eigentlichen Geraden $\mathfrak{bc}$ enthalten, d. h. $\mathfrak{bc}$ müßte auf $B'C'$ und B_1C_1 senkrecht stehen, weil sonst *jeder* Punkt dieser Geraden von ihnen verschiedene Senkrechte zu $\mathfrak{bc}$ enthielte. Da aber eine Senkrechte zu zwei verschiedenen Geraden nicht deren Schnittpunkt enthalten kann, so ist unsere Annahme absurd.

Was endlich *die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen drei Winkeln* betrifft, so folgt aus dem zweiten Kosinussatz und aus Gleichung (17) leicht die Formel:

$$\frac{2\varkappa m^2}{1-\varkappa m^2}\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos\gamma, \tag{45}$$

wenn m die projektive Strecke ist, die zur halben Seite $\bar{c}$ gehört. Bezeichnen wir daher einen gestreckten Winkel mit $2R$ und nehmen an, daß γ einer der zwei jedenfalls spitzen Winkel sei, so muß $\cos\gamma - \cos(2R-\alpha-\beta)$ positiv, Null oder negativ sein, je nachdem dasselbe von $\varkappa$ gilt, d. h. für $\varkappa > 0$ muß $2R-\alpha-\beta > \gamma$ sein oder $\alpha+\beta+\gamma < 2R$, für $\varkappa = 0$ muß $\alpha+\beta+\gamma = 2R$ sein und für $\varkappa < 0$ muß $2R-\alpha-\beta < \gamma$ oder $\alpha+\beta+\gamma > 2R$ sein. Wir erhalten daher das wichtige Resultat, daß *in jedem Dreiecke die Summe der drei Winkel kleiner, gleich oder größer wie ein gestreckter Winkel ist, je nachdem $\varkappa$ positiv, Null oder negativ ist.* Wir kommen auf diesen wichtigen Satz sogleich noch näher zurück. Ist obige Bedingung erfüllt, so kann für $\varkappa \gtrless 0$ die projektive Strecke $\frac{m}{\sqrt{1-\varkappa m^2}}$ mit Zirkel und Lineal konstruiert werden und daraus nach der in Fig. 31 gegebenen Lösung für $\varkappa > 0$ auch in jedem Falle m oder $\bar{c}$, für $\varkappa < 0$ aber nur dann, wenn $\alpha+\gamma < 2R+\beta$ und $\beta+\gamma < 2R+\alpha$. Denn für ein negatives $\varkappa$ muß der absolute Wert von $\frac{\varkappa m^2}{1-\varkappa m^2}$ stets < 1 sein, woraus sich diese beiden Ungleichungen leicht ergeben. Auf diese Konstruktionen, die zwar z. B. auf einer Kugeloberfläche

mit Hilfe von zwei Zirkeln, von denen der eine eine feste Spannweite $(r\sqrt{2})$ besitzt, praktisch ausgeführt werden könnten, näher einzugehen, liegt für uns keine Veranlassung vor.

No. 35. Konstruktion von Parallelen nach Lobatschefskij und Bolyai. Der Satz von der Summe der Winkel im Dreiecke zeigt nun, daß es jedenfalls für $\varkappa \geqq 0$ uneigentliche Punkte gibt, nämlich die absoluten Pole aller eigentlichen Geraden. Während diese uneigentlichen Punkte für $\varkappa = 0$ alle auf einer uneigentlichen Geraden liegen, wobei aber das Vorhandensein weiterer uneigentlicher Punkte noch dahingestellt bleiben muß, können wir für $\varkappa > 0$ jedenfalls so viel sagen, daß *jeder Punkt, dessen Abszisse oder Ordinate* $\geqq k$ *ist, wo* $k = \sqrt{\mathfrak{K}} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}$ *ist, ein* ***uneigentlicher*** *Punkt ist.* Denn ist K der uneigentliche Punkt auf OX, für den $(OK) = +k$, Q ein Punkt, für den $(OQ) > k$, und R ein eigentlicher Punkt von OY, so fällt RK in den Winkel ORQ, es müßte also auch K ein eigentlicher Punkt sein, wenn Q es wäre. Daß aber K selbst kein eigentlicher Punkt sein kann, ergibt sich daraus, daß ein solcher Punkt bei jeder Schiebung längs der Achse OX, die konjugierte Punkte dieser Geraden in ebensolche verwandelt, fest bleiben, also, wenn er ein eigentlicher Punkt wäre, von allen Punkten denselben Abstand haben müßte. Ob aber jeder Punkt Q, dessen positive Abszisse $< k$ ist, ein eigentlicher Punkt sei, d. h. ob jeder Strahl durch R, der innerhalb des Winkels ORK liegt, darüber läßt sich noch nichts Allgemeines aussagen. Fügt man dies als eine neue Voraussetzung[1]) hinzu, so wird die Gerade RK nach Lobatschefskij eine der beiden *Parallelen* durch R zu OX genannt.[2]) Für die Amplitude λ oder den sogenannten *Parallelwinkel* der Parallelen durch O zu der in R auf OY senkrechten Geraden RP findet man offenbar:

$$\text{(46)} \qquad \operatorname{tg} \lambda = \frac{y}{\sqrt{\mathfrak{K} - y^2}} = \frac{y\sqrt{\varkappa}}{\sqrt{1 - \varkappa y^2}}.$$

1) Vgl. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, Math. Ann. Bd. 57, p. 139. Wegen der Entstehung dieses Parallelenbegriffs s. Stäckel, Friedrich Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, Math. Ann. Bd. 54, S. 49 fl.

2) Bolyai (Appendix § 1) schreibt $RK \,|||\, OX$; nach Aufzeichnungen in seinem Nachlaß (vgl. J. Kurschák und P. Stäckel, Johann Bolyais Bemerkungen über N. Lobatschefkijs Geom. Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, Ungar. Ber. Bd. 18, S. 258) soll dies Zeichen *Asymptote* bedeuten. Als *Parallele* bezeichnet dagegen Bolyai jede durch R gehende, OX nicht scheidende Gerade.

Eine solche Parallele schneidet daher das Lot QP von P auf OX in einem Punkte S mit den Koordinaten x, $\frac{\sqrt{\varkappa x y}}{\sqrt{1-\varkappa y^2}}$, dessen Abstand von O gegeben ist durch:

$$(47) \qquad (\overline{OS}) = \sqrt{x^2 + \frac{\varkappa x^2 y^2}{1-\varkappa y^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-\varkappa y^2}} = (\overline{RP}).$$

Hieraus ergibt sich die bekannte Lobatschefskijsche Konstruktion der Parallelen. Die Gleichung $\overline{OS} = \overline{RP}$ läßt sich auch leicht geometrisch beweisen. Ist G der Schnittpunkt von RP mit OS, und sind daher die Umwendungen H von G um OY und L von G um O die zweiten sich selbst konjugierten Punkte von RP und OS, so ist auch L die Umwendung von H um OX, oder LH enthält den absoluten Pol V von OX (Fig. 36). Da hiernach von V aus nicht nur R, P in O, S, sondern auch die sich selbst konjugierten Punkte G, H in die sich selbst konjugierten Punkte G, L projiziert werden, so werden je zwei konjugierte Punkte von RP in ebensolche von OS projiziert, d. h. es ist nach der 17. Definition $(\overline{RP}) = (\overline{OS})$, also nach dem 72. Satze $\overline{RP} = \overline{OS}$. (In dem Viereck $OQPR$ mit drei rechten Winkeln ist beiläufig $\overline{OQ} < \overline{RP}$). Wir können dies Resultat folgendermaßen aussprechen: *Zieht man durch einen Punkt O einer Geraden g die Senkrechte OR gegen eine Parallele h zu g und die Senkrechte k zu OR, so wird jede Strecke von h senkrecht gegen k in eine ihr kongruente Strecke auf g projiziert.*[1])

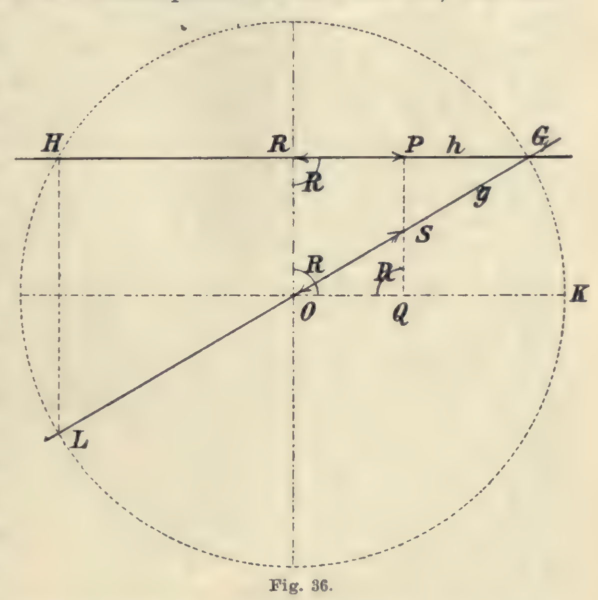


Fig. 36.

1) Lobatschefskij, Über die Anfangsgründe der Geometrie (1829), übersetzt von F. Engel, Leipzig 1898, S. 26, Joh. Bolyai, Appendix (1832), § 34; vgl. hierzu F. Engel, Zur nichteuklidischen Geometrie, Leipz. Ber. 1898, S. 181 ff. Der obige Beweis dürfte die Natur des Satzes am einfachsten zum

Aus dem Umstande, daß es für $\varkappa \geqq 0$ stets uneigentliche Punkte geben muß oder solche Geraden einer Ebene, welche keinen eigentlichen Schnittpunkt besitzen, können wir schließen, *daß $\varkappa < 0$ sein muß, sobald angenommen wird, daß je zwei Geraden derselben Ebene einen wirklichen Schnittpunkt haben;* aber nicht umgekehrt, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden.

Ausdruck bringen. Bei den genannten Autoren werden zum Beweise die sogenannten Grenzflächen benutzt, zu denen wir durch folgende einfache Überlegung kommen. Betrachten wir die Geometrie in einem Strahlenbündel mit einem uneigentlichen Zentrum K, das sich selbst konjugiert ist, so läßt jede Bewegung, bei der K fest bleibt, auch die absolute Polarebene ω von K fest, so daß jedem Strahle durch K in ω ein Strahl auf dieser Ebene ω konjugiert ist. Sehen wir daher die Strahlen dieses Büschels als Punkte an und seine Ebenen als Geraden und verstehen unter Bewegungen dieser Ebene diejenigen Verwandtschaften, welche die Strahlen so verwandeln wie die Bewegungen bei festem K, so gilt offenbar in dieser Ebene die euklidische Geometrie. Von dem Strahlenbündel kann sie zugleich auf jede Fläche übertragen werden, die aus allen Punkten besteht, die aus einem Punkte durch die beschriebenen Bewegungen hervorgehen, wenn wir als Geraden einer solcher Fläche (F oder Parasphäre nach Bolyai, Grenzfläche nach Lobatschefskij) die Schnitte mit Ebenen durch K verstehen. In jedem Dreiecke einer solchen Fläche ist daher die Summe der Winkel jedes Dreiecks gleich zwei Rechten. Wir haben keine Veranlassung, auf diese Flächen näher einzugehen.

§ 6.

Das Parallelenaxiom.

No. 36. Summe der Winkel im Dreieck. Aus den trigonometrischen Formeln des vorigen Paragraphen ging hervor, daß die Art der für unsere Geometrie charakteristischen absoluten Involution jeder Geraden wesentlich von der Summe der Winkel in irgend einem Dreieck abhängt. Es läßt sich dies Resultat folgendermaßen aussprechen:

86. Satz. *Je nachdem in irgendeinem Dreiecke die Summe der Winkel kleiner, gleich oder größer als ein gestreckter Winkel ist, gilt dasselbe für jedes andre Dreieck.*

Von diesem Satze, den man immer Legendre zugeschrieben hat, den aber schon Saccheri[1]) gefunden und bewiesen hat, wollen wir auch einen geometrischen Beweis geben, den man im wesentlichen Joh. Heinr. Lambert[2]) verdankt. Auch hierbei werden wir uns auf solche Dreiecke und Vierecke beschränken müssen, deren Seiten kleiner sind als die absolute Strecke von jedem Eckpunkte bis zu seiner absoluten Polare, oder wir werden *solche Dreiecke auszuschließen haben, welche mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel besitzen.* Daraus ergibt sich auch der 75. Satz, wonach die Katheten jedes rechtwinkligen Dreiecks kleiner sind als die Hypotenuse, ohne unsere Streckenrechnung. Denn eine Kathete kann weder gleich noch größer sein als die Hypotenuse, weil es im ersten Falle ein gleichschenkeliges Dreieck mit zwei rechten Winkeln und im zweiten Falle mit einem spitzen und einem stumpfen Winkel an der Grundlinie gäbe. Hieraus ergibt sich nun zunächst der Hilfssatz:

1. Hilfssatz. *Je nachdem in einem Vierecke $ABCD$ mit den drei rechten Winkeln A, B, C der vierte Winkel D kleiner, gleich oder*

---

1) Vgl. hierzu Engel u. Stäckel, Die Theorie der Parallellinien, Leipzig 1895, S. 31 ff., oder Bonola, Die nichteuklidische Geometrie, übersetzt von H. Liebmann, Leipzig 1908, S. 24 ff.

2) S. a. d. a. O. S. 137 ff. oder S. 46 ff.

größer als ein rechter Winkel ist, ist $\overline{BC} \lesseqgtr \overline{AD}$ *und* $\overline{AB} \lesseqgtr \overline{DC}$, *und umgekehrt.*

Da nämlich die Senkrechte in der Mitte M der Seite $\overline{AB}$ nach unserer Voraussetzung weder von $\overline{BC}$ noch von $\overline{AD}$ einen Punkt enthalten kann, so liegen C und D auf verschiedenen Seiten dieser Mittelsenkrechten, diese enthält also einen Punkt N von CD (Fig. 37). Fällt daher bei der Umwendung um MN der Punkt C nach C', so wird, je nachdem $\sphericalangle CDA$ oder $\sphericalangle NDA \lesseqgtr R$ ist, C' auf $\overline{AD}$ fallen oder auf D oder auf die Verlängerung $\overrightarrow{AD}$; denn $\sphericalangle NDC'$ muß, weil $NC' \perp AC'$ ist, stets $\leq R$ sein. Ebenso folgt die Umkehrung. Hieraus folgt weiter:

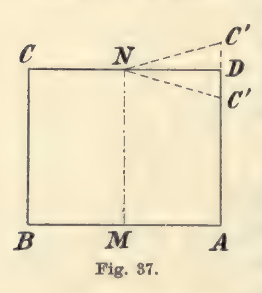


Fig. 37.

2. Hilfssatz. *Je nachdem in irgend einem Vierecke mit drei rechten Winkeln der vierte Winkel kleiner, gleich oder größer als ein rechter Winkel ist, gilt dasselbe für jedes Viereck mit drei rechten Winkeln.* (Vgl. hierzu den 95. Satz in § 7).

Es wird offenbar genügen, den Satz für zwei Vierecke $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ zu beweisen, die eine an zwei rechte Winkel stoßende Seite $\overline{BC}$ gemein haben. Denn fallen bei derjenigen Bewegung, welche den rechten Winkel $A_1B_1C_1$ in ABC überführt (Fig. 38), etwa A_1 nach A' auf die Seite $\overline{BA}$, C_1 nach C' auf der Halbgeraden $(B)C$ und D_1 nach D', so enthält die Halbgerade $(A')D'$ jedenfalls einen Punkt $\bar{D}$ der Seite $\overline{CD}$, es steht also das Viereck $ABCD$ zu $A'BC\bar{D}$ und dieses zu $A'BC'D'$ in der obigen Beziehung.

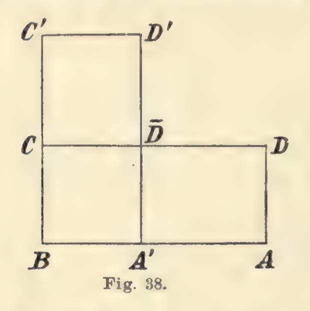


Fig. 38.

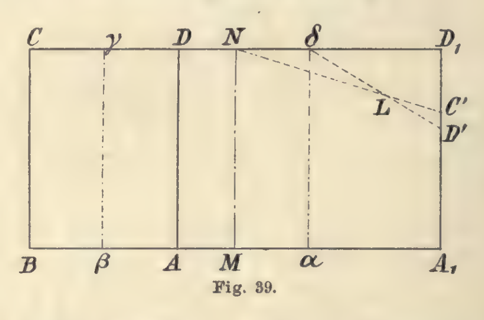


Fig. 39.

Sind nunmehr $ABCD$ und A_1BCD_1 die beiden Vierecke, so zwar, daß A auf $\overline{BA_1}$, also auch D auf $\overline{CD_1}$ liegt (Fig. 39), so wollen wir zuerst annehmen, daß $\overline{A_1D_1} = \overline{BC}$ sei. Daraus folgt, daß bei den Umwendungen um die Mittelsenkrechten $\beta\gamma$ von $\overline{BA}$ und $\overline{\alpha\delta}$ von $\overline{AA_1}$ die Punkte C und D_1 in denselben Punkt D' von AD

fallen, so zwar, daß $\sphericalangle AD'\gamma = \sphericalangle AD'\delta = R$ ist. Deshalb liegt D' auf der Geraden $\gamma\delta$ oder CD_1, fällt also mit D zusammen, d. h. es ist auch $\overline{AD} = \overline{BC}$. Der Beweis bleibt derselbe, wenn A_1 auf $\overline{BA}$ liegt.

Nehmen wir daher weiter an, daß $\overline{A_1D_1} > \overline{BC}$ sei, so kann sicher $\overline{AD}$ nicht $= \overline{BC}$ sein. Es kann aber auch $\overline{AD}$ nicht $< \overline{BC}$ oder $\sphericalangle ADC$ ein stumpfer Winkel sein. Dann fiele nämlich bei den Umwendungen um die Mittelsenkrechte MN von $\overline{BA_1}$ und $\alpha\delta$ von $\overline{AA_1}$ der Punkt C nach C' auf $\overline{A_1D_1}$ und D nach D' auf $\overline{A_1C'}$, so zwar, daß $\sphericalangle \delta D'A_1$ ein spitzer wäre. Um zu zeigen, daß dies unmöglich sei, bemerken wir zuvörderst, daß α auf $\overline{A_1M}$, also auch δ auf $\overline{D_1N}$ liegen muß. Dies ist selbstverständlich, falls A auf $\overline{A_1M}$ liegt. Ist dies nicht der Fall, sondern liegt M auf $\overline{A_1A}$, so mag bei derjenigen Schiebung, welche A_1 in M, also M in B verwandelt, A in A' auf der Verlängerung $\overrightarrow{A_1B}$ übergehen, so daß $\overline{MA} \simeq \overline{BA'}$ ist. Die Mitte von $\overline{MA'}$ ist daher zugleich diejenige β von $\overline{AB}$, d. h. bei jener Schiebung geht α in β über. Da aber β sicher auf $\overline{MB}$ liegt, so liegt auch α auf $\overline{A_1M}$. Da folglich δ auf $\overline{D_1N}$ und C' auf $\overline{D_1D'}$ liegen, so hätten die Strecken $\overline{\delta D'}$ und $\overline{NC}$ einen Punkt L gemein, und dieser Punkt wäre die dritte Ecke eines Dreiecks $L'C'D'$ mit einem rechten Winkel bei C' und einem stumpfen Winkel bei D'. Hiermit ist die Unvereinbarkeit der beiden Annahmen $\overline{A_1D_1} > \overline{BC}$ und $\overline{AD} < \overline{BC}$ dargetan, und in entsprechender Weise ergibt sich die Unvereinbarkeit der beiden Annahmen $\overline{A_1D_1} < \overline{BC}$ und $\overline{AD} > \overline{BC}$, womit der zweite Hilfssatz bewiesen ist.

Betrachten wir nun das Dreieck ABC, so ist leicht zu sehen, daß die Senkrechten $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ und $\overline{BF}$ von seinen Ecken auf die Verbindungslinie $\mathfrak{ab}$ der Mitten der Seiten BC und AC einander gleich sind. Ist daher $\mathfrak{bc}$ die Mittelsenkrechte von $\overline{EF}$ und $\mathfrak{c}$ ihr Schnittpunkt mit der Seite $\overline{AB}$, so vertauscht die Umwendung um $\mathfrak{bc}$ die Strecken $\overline{EA}$ und $\overline{FB}$, also auch $\overline{A\mathfrak{c}}$ und $\overline{B\mathfrak{c}}$, $\mathfrak{bc}$ ist folglich auch Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$. Nun ist (vgl. die beiden in den Figuren 40 und 41 dargestellten Fälle[1]) doch die Summe der beiden einander gleichen Winkel BAE und ABF gleich der Summe der Winkel unseres Dreiecks. Je nachdem also die letzte Summe größer, gleich oder kleiner als ein gestreckter Winkel ist, werden jene beiden Winkel größer, gleich oder kleiner als ein rechter Winkel sein, wird folglich dasselbe für den vierten Winkel jedes Vierecks

---

1) Vgl. hierzu Vahlen, Abstrakte Geometrie, Leipzig, 1905, S. 256.

mit drei rechten Winkeln gelten, wird daher schließlich in jedem Dreiecke die Summe der drei Winkel größer, gleich oder kleiner als ein gestreckter Winkel sein, womit unser Satz bewiesen ist.

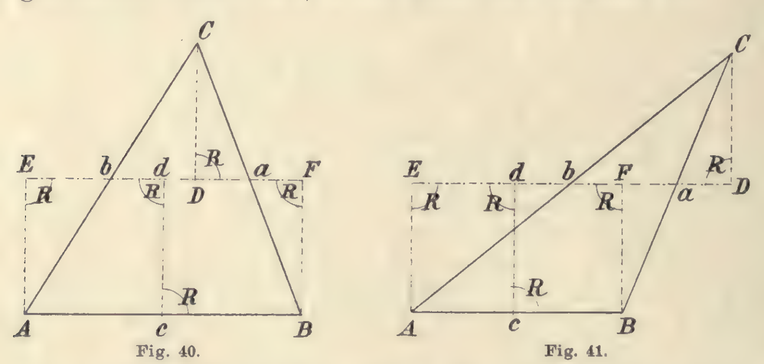


Fig. 40. Fig. 41.

Aus diesem Satze haben sowohl Saccheri als Lambert, besonders aber Legendre[1]) vergeblich versucht zu beweisen, daß die Summe der Winkel jedes Dreiecks *gleich* einem gestreckten Winkel sein muß, woraus unter Zuhilfenahme eines Stetigkeitsaxioms das sogenannte Parallelenaxiom folgen würde. Da ist es nun wichtig, daß wir uns zuerst davon überzeugen, daß die bisherigen Postulate selbst unter Hinzunahme eines Stetigkeitsaxioms zur Entscheidung über den Wert dieser Winkelsumme oder das Vorzeichen der von uns mit $\varkappa$ bezeichneten Konstanten nicht ausreichen.

No. 37. Widerspruchslosigkeit der Postulate. Projektive Postulate. Für solche Untersuchungen konstruieren wir uns sogenannte *künstliche Geometrien*, indem wir Punkte und Strecken durch Zahlengrößen so definieren, daß unsere Postulate rein formal, d. h als bloße Ausdrücke der Beziehungen zwischen den wohl definierten Begriffen Punkt und Strecke definiert sind. Wenn uns dies gelingt, so haben wir zugleich einen rein logischen Beweis für die Widerspruchslosigkeit unserer Postulate erbracht, ohne daß wir dadurch freilich der Definition der *geometrischen* Grundbegriffe Punkt und Strecke irgendwie näher gekommen wären. Eine solche Definition ist in der Tat unmöglich, wenn wir auf die Erfahrung anwendbare Geometrie treiben wollen. Da aber in den Beweisen einer solchen Geometrie die logischen Beziehungen der Grundbegriffe das Wesentliche sind, so können uns jene künstlichen Geometrien doch über den logischen Zusammenhang der Gebilde einer wirklichen

1) Vgl. hierzu Bonola a. a. O., S. 58ff.

Geometrie jede wünschenswerte Aufklärung verschaffen. Freilich soll hiermit die Rolle, die die Anschauung nicht nur in der geometrischen Forschung immer gespielt hat, nicht unterschätzt werden.

Von den *Zahlengrößen*, durch die wir die Grundbegriffe definieren wollen, setzen wir zunächst nur dies voraus, daß sie den bekannten Regeln der Rechnung und des Größer- und Kleiner-Seins gehorchen, wie sie in § 4 für projektive Strecken bewiesen wurden, behalten uns aber vor, über die Erzeugung dieser Größen aus ganzen Zahlen in gegebenem Falle besondere Voraussetzungen zu machen. Um die Vorstellungen zu fixieren, verstehen wir unter diesen Zahlengrößen zunächst die gewöhnlichen rationalen und irrationalen Zahlen, unbekümmert darum, ob dadurch auch gewisse andere Postulate erfüllt sind, auf die wir erst später einzugehen haben. Daß diese Zahlen die Regeln der Rechnung und des Größer- und Kleiner-Seins befriedigen, betrachten wir als Ausfluß ihrer Entstehung aus der ganzen Zahl.[1]) Die ganze Zahl selbst ergibt sich unserer Ansicht nach aus der uns innewohnenden Fähigkeit des Zählens, und alle Versuche einer anderen Begründung des Zahlbegriffs benutzen doch diese Fähigkeit an irgend einer Stelle mehr oder weniger versteckt.

Dies vorausgesetzt, verstehen wir unter einem *Punkte* P oder (x, y, z) eine Gruppe von drei endlichen Zahlen x, y, z dieses Gebiets, wobei die Anordnung der drei Zahlen oder Koordinaten des Punktes wesentlich, also z. B. der Punkt x, y, z vom Punkte (y, x, z) verschieden ist, sobald x und y voneinander verschieden sind. Weiter verstehen wir unter einer durch die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ bestimmten *Strecke* $\overline{P_1 P_2}$ die Menge der Punkte $P(x, y, z)$, die in der Form:

$$(1) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)u, \quad y_1 = y_1 + (y_2 - y_1)u, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)u$$

darstellbar sind, wo $0 \leqq u \leqq 1$ ist. Dann ist leicht zu sehen, daß die in § 1 aufgestellten projektiven Postulate für die so definierten Begriffe Punkt und Strecke erfüllt sind. Sind zuerst $x_1 + (x_2 - x_1)u$ usw. und $x_1 + (x_2 - x_1)v$ usw. irgend zwei Punkte der Strecke $P_1 P_2$, so zeigen die Gleichungen:

$$(2) \; x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_2 - x_1)(v - u)w = x_1 + (x_2 - x_1)(u(1 - w) + vw)$$

usw., daß auch jeder Punkt der durch diese beiden Punkte bestimmten Strecke der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ angehört; denn es ist $u(1 - w)$

1) S. z. B. H. Weber, Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis, 2. Aufl., Leipzig 1906, 1. Buch.

$+ vw \leqq 1 - w + w$. Die Geltung des 3. Postulats ist ohne weiteres klar. Weiter besagt die Voraussetzung des 4ª. Postulats, daß $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1 - (x_2 - x_1)u)v$, usw. oder $(x_2 - x_1)(1 - u + uv) = (x_3 - x_1)v$, usw. Bestimmt man daher w so, daß $(1 - u + uv)w = u$ wird, so ist erstens $(1 - u)w < u$ und $uvw < u$, also auch $vw < 1$, und zweitens $x_1 + (x_2 - x_1)u = x_1 + (x_3 - x_1)vw$ usw., so daß das 4ª. Postulat gilt. Endlich besagt die Voraussetzung des 4ᵇ. Postulats, daß $(x_2 - x_1)u = (x_3 - x_1)v$ usw. ist. Wenn daher zuerst $u \geqq v$ angenommen wird und w aus $uw = 1$ bestimmt wird, so ist $1 \geqq vw$ und $x_1 + x_2 - x_1 = x_1 + (x_3 - x_1)vw$, usw. Ebenso folgt für den Fall $v \geqq u$ aus $vw = 1$, daß $x_3 = x_1 + (x_2 - x_1)uw$ usw., und $uw \leqq 1$ ist, es ist daher auch dies Postulat bewiesen. Wir bemerken noch, daß in den Formeln (1) die Punkte der *Verlängerungen* der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ über P_2 resp. P_1 hinaus dargestellt sind, wenn $u > 1$ resp. $u < 0$ wird. Das 5. Postulat ist ja selbstverständlich.

Was aber das 6. Postulat von der *Ebene* betrifft, so nimmt es an, daß P_1, P_2, P_3 drei nicht in einer Geraden gelegene Punkte seien daß es also kein u gebe, durch das die Formeln (1) bei der Annahme $x = x_3$, $y = y_3$, $z = z_3$ befriedigen wären. Ist daher P_4 mit den Koordinaten $x_1 + (x_2 - x_1)u$ usw. ein Punkt der Strecke $\overline{P_1 P_2}$ und P_5 mit den Koordinaten $x_3 + (x_1 - x_3 + (x_2 - x_1)u)v$ usw. ein Punkt der Strecke $\overline{P_3 P_4}$, so werden in der Tat die Gleichungen:

(3) $x_1 + (x_3 - x_1 + \{x_1 - x_3 + (x_2 - x_1)u\}v)w = x_2 + (x_3 - x_2)t$ usw.

oder:

(4) $(x_2 - x_1)(1 - uvw) + (x_3 - x_1)(1 - v)w + (x_3 - x_2)t = 0$ usw.,

für jeden Wert der x_i, y_i, z_i erfüllt, wenn:

(5) $$1 - uvw = (1 - v)w = t$$

ist, woraus $(1 - (1 - u)v)w = 1$ und $t = (1 - v)w$ folgt. Da nun $1 - (1 - u)v < 1$ ist, so ist $1 < w$, und weil $t > 0$, so ist der ersten Form wegen auch $t < 1$. Demnach enthält in der Tat die Strecke $\overline{P_2 P_3}$ einen Punkt der Verlängerung von $\overline{P_1 P_5}$ über P_5 hinaus, wie unser Postulat besagt. Zugleich sieht man, daß falls die drei Punkte nicht in einer Geraden liegen, die Gleichungen (3) oder (4) nur auf obige Weise befriedigt werden können. Denn gäbe es für bestimmte Werte von u und v noch ein zweites Wertsystem von w und t, das obigen Gleichungen genügt, nämlich w' und t', so würde, falls s aus $ts = t'$ bestimmt wird, folgen:

(6) $(x_2 - x_1)(s - 1 - uv(ws - w')) + (x_3 - x_1)(1 - v)(ws - w') = 0$

usw., woraus sich, da P_1 von P_2 und P_3 verschieden sein muß, Gleichungen von der Form $x_3 = x_1 + (x_2 - x_1)r$ usw. ergeben würden, d. h. P_3 müßte gegen die Voraussetzung mit P_1 und P_2 in gerader Linie liegen.

Definiert man nunmehr die *Ebene* $P_1 P_2 P_3$ der 3. Definition entsprechend, so findet man leicht, daß die Koordinaten x, y, z ihrer Punkte in der Form $x_3 + (x_1 - x_3 + (x_2 - x_1)u)v$ usw. darstellbar sind, wo u und v alle möglichen Werte unseres Größengebiets annehmen können, daß sie also einer Gleichung von der Form:

$$(7) \qquad Ax + By + Cz = D$$

genügen, und daß umgekehrt jeder Punkt, dessen Koordinate einer solchen Gleichung genügt, einer Ebene angehört.[1]) Definiert man demnach den Raum mit Hilfe eines vierten Punktes P_4, der nicht dieser Ebene angehört, so sieht man, daß die Koordinaten x, y, z seiner Punkte in der Form $x_4 + (x_3 - x_1 + (x_1 - x_3 + (x_2 - x_1)u)v)w$ usw. darstellbar sind, wo u, v, w alle möglichen Zahlenwerte annehmen können, und daß umgekehrt jedes Wertsystem x, y, z in dieser Form dargestellt werden kann, daß also auch das 8. Postulat gilt.

No. 38. Postulate der Bewegung in der euklidischen Geometrie. Um zu den *Bewegungen* zu gelangen, definieren wir zuerst die Rechtwinkeligkeit zweier Geraden in bekannter Weise. Verstehen wir unter den *Richtungskosinus* α, β, γ der Geraden von P_1 nach P_2 die Größen:

$$\alpha = \frac{x_2 - x_1}{r}, \quad \beta = \frac{y_2 - y_1}{r}, \quad \gamma = \frac{z_2 - z_1}{r},$$

wo $r = +\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, so bestimmen je zwei Punkte der Geraden $P_1 P_2$ bis auf das Vorzeichen dieselben Richtungskosinus, und durch dies Vorzeichen unterscheiden wir die beiden Richtungen einer und derselben Geraden. In der Tat ist klar, daß die Strecke von P_1 nach einem der beiden Punkte $(x_1 \pm r\alpha$, usw.), wo r irgendeine positive Größe ist, jedesmal den anderen Punkt nicht enthält.

Nunmehr nennen wir zwei Geraden mit den Richtungskosinus $\alpha_1\, \beta_1\, \gamma_1$ und $\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2$ *senkrecht* aufeinander, wenn:

$$(8) \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$$

ist. Dann liegen offenbar alle Geraden, die in einem Punkte auf

1) Wir setzen die Kenntnis der elementaren analytischen Geometrie voraus und haben uns deshalb hier und in dem Folgenden kürzer gefaßt.

einer anderen senkrecht stehen, in derselben Ebene. Ferner können wir zu je zwei aufeinander senkrechten Geraden eine und nur eine dritte mit den auch den Vorzeichen nach bestimmten Richtungskosinus $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$ so finden, daß sie auf beiden senkrecht steht und die Determinante:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \\ \alpha_2 \beta_2 \gamma_2 \\ \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \end{vmatrix} = +1$$

wird. Dann ist bekanntlich $\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \gamma_2\beta_3$, $\alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \gamma_3\beta_1$ usw. Die vom Punkte $O(o, o, o)$ ausgehenden Halbgeraden OX, OY, OZ mit den Richtungskosinus 1, 0, 0; 0, 1, 0; 001 oder die sogenannten Koordinatenachsen bilden ein solches Tripel. Wir wollen deshalb je drei aufeinander senkrechte Halbgeraden mit positiver Determinante und gemeinsamem Anfangspunkt *ein mit dem Koordinatenkreuz gleich orientiertes Tripel nennen.*

Definieren wir als *Bewegung* eine solche lineare Transformation der Koordinaten, durch die jedes mit dem Achsenkreuz gleich orientierte Tripel in ein ebensolches übergeht, so findet man, daß eine solche Transformation die Form hat:

$$(10) \qquad \begin{cases} x' = a + f_1 x + f_2 y + f_3 z, \\ y' = b + g_1 x + g_2 y + g_3 z, \\ z' = c + h_1 x + h_2 y + h_3 z, \end{cases}$$

wo $O'(a, b, c)$ der Punkt ist, in den der Punkt $O(o, o, o)$ übergeht, und $f_1\,g_1\,h_1$, $f_2\,g_2\,h_2$, $f_3\,g_3\,h_3$ die Richtungskosinus der Halbgeraden sind, in die OX, OY, OZ übergehen. In Rücksicht auf die hiernach zwischen den 9 Richtungskosinus bestehenden bekannten Beziehungen ist es in der Tat nicht schwer einzusehen, daß diese Transformationen erstens die obige Bedingung erfüllen und zweitens den in § 4 aufgestellten Postulaten genügen.

Es wird in dieser Hinsicht nur nötig sein, auf das 11. Postulat näher einzugehen. Sollen also dem Punkte $M(l, m, n)$ der Punkt $M'(l', m', n')$ entsprechen und den zwei aufeinander senkrechten Halbgeraden durch M mit den Richtungskosinus $\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$ und $\alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2$ die zwei aufeinander senkrechten Halbgeraden durch M' mit den Richtungskosinus $\alpha_1'\beta_1'\gamma_1'$ und $\alpha_2'\beta_2'\gamma_2'$, so daß von selbst auch der Halbgeraden durch M mit den Richtungskosinus $\alpha_3\,\beta_3\,\gamma_3$, die mit den ersten beiden Halbgeraden ein mit dem Koordinatenkreuz gleich orientiertes Tripel bildet, die Halbgerade $\alpha_3'\beta_3'\gamma_3'$ entspricht, die ein

ebensolches Tripel mit den anderen beiden Halbgeraden bildet, so erhalten wir zuerst drei Gleichungssysteme von der Form:

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha_1' = \alpha_1 f_1 + \beta_1 f_2 + \gamma_1 f_3, \\ \alpha_2' = \alpha_2 f_1 + \beta_2 f_2 + \gamma_2 f_3, \\ \alpha_3' = \alpha_3 f_1 + \beta_3 f_2 + \gamma_3 f_3 \text{ usw.}, \end{cases}$$

die zur Bestimmung der neun Größen f_1, g_1, h_1 usw. dienen, so daß die Gleichungen (10) vermöge der Bedingung, daß M in M' übergehe, auch die Werte von a, b, c liefern. Daß zwischen den so bestimmten Größen f_1, g_1, h_1 usw. die bekannten Beziehungen bestehen, ergibt sich wiederum aus denselben Beziehungen zwischen den α_1, β_1, γ_1 usw. einerseits und den α_1', β_1', γ_1' usw. andererseits.

Zu diesem Beweise ist indessen eine wichtige Bemerkung zu machen. Denken wir uns die die Bewegung bestimmenden vier Halbgeraden durch die Koordinaten von M und M' und durch diejenigen von vier ihrer Punkte gegeben, so entstehen die Größen $f_1 = \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \alpha_3\alpha_3'$, $f_2 = \beta_1\alpha_1' + \beta_2\alpha_2'\,\beta_3\alpha_3'$ usw. aus diesen Koordinaten nicht nur durch die Operationen des Addierens, Multiplizierens und deren Umkehrungen, sondern auch durch Operationen von der Form $\sqrt{1+g^2+h^2}$, wo g und h durch die ersten Operationen entstanden sind. Da bei den so definierten Bewegungen je zwei senkrechte Gerade in ebensolche übergehen, so ist klar, daß die neue Definition des Senkrecht-Stehens mit der in § 4 durch die Umwendungen gegebenen übereinstimmt. Dies ist auch leicht analytisch zu bestätigen.

Nehmen wir weiter als das erste Tripel das Koordinatenkreuz an, verlegen auch M' nach O und setzen ferner $\gamma_1' = \gamma_2' = \alpha_3' = \beta_3' = 0$, $\alpha_2' = \beta_1'$, $\beta_2' = -\alpha_1'$, $\gamma_3' = -1$, so nimmt nach den Gleichungen (11) die Bewegung (10) die Form $x' = \alpha_1'x + \beta_1'y$, $y' = \beta_1'x - \alpha_1'y$, $z' = -z$ an, es gilt also das 12. Postulat von der Umkehrbarkeit des Winkels (vgl. Gl. (V) auf S. 78). Machen wir endlich bezüglich des ersten Tripels dieselbe Voraussetzung, setzen aber $l' = a$, $m' = 0$, $n' = 0$, ferner $\alpha_1' = -1$, $\beta_1' = \gamma_1' = \alpha_2' = \gamma_2' = \alpha_3' = \gamma_3' = 0$, $\beta_2' = 1$, $\gamma_3' = -1$, so nimmt die Bewegung die Form $x' = a - x$, $y' = y$, $z' = -z$ an, es gilt folglich auch das 13. Postulat von der Umkehrbarkeit der Strecke. Die Vergleichung der Gleichungen dieser Umwendung mit den Formeln (X) auf S. 83 führt uns darauf, daß bei der von uns gegebenen Definition der Bewegung $\varkappa = 0$ sein muß. In der Tat ergibt sich nun in bekannter Weise, daß die Geraden, die auf der Ebene (7) senkrecht stehen, zugleich zu allen denjenigen Ebenen senkrecht sind, welche durch Gleichung (7) bei konstanten

Werten von $A, B, C,$ aber bei beliebigen D dargestellt sind, daß also allen Punkten einer Geraden ein und derselbe uneigentliche oder unendlich ferne Punkt konjugiert ist.

Hiermit haben wir in Anlehnung an die Formeln der elementaren analytischen Geometrie bewiesen, daß unsere Postulate widerspruchslos sind — auf das 14. Postulat kommen wir später —, und können, um zu beweisen, daß dieselben Postulate auch mit der Annahme eines von Null verschiedenen Wertes der charakteristischen Konstanten $\varkappa$ zu vereinigen sind, zu Vermeidung verwickelter Formeln und zur Erzielung größerer Anschaulichkeit die bekannte euklidische Geometrie und im besondern auch die von uns abgeleiteten Sätze der projektiven Geometrie als gegeben annehmen. Die widerspruchslose Geltung der projektiven Geometrie hätten wir freilich auch ohne die Postulate der Bewegung ableiten können. Auf Grund der projektiven Postulate gilt nämlich die in § 2 entwickelte Lehre von den uneigentlichen Elementen, und man findet im besonderen, daß die einander parallelen Geraden, d. h. die Geraden mit gleichen oder entgegengesetzt gleichen Richtungskosinus einen uneigentlichen Punkt bestimmen, und daß alle diese uneigentlichen Punkte einer uneigentlichen Ebene angehören. Macht man daher auf OX die Punkte $(0, 0, 0)$ und $(1, 0, 0)$ zum Null- resp. Einheitspunkt und den uneigentlichen Punkt zum Unendlichkeitspunkt einer projektiven Streckenrechnung, so zeigt die Verlegung der in § 4 benutzten Projektionspunkte (S und S_1) in obige uneigentliche Ebene, daß die Addition und Multiplikation projektiver Strecken solche Strecken ergibt, die durch Addition und Multiplikation der die Endpunkte jener bestimmenden Koordinaten entstehen, daß also in dieser projektiven Streckenrechnung auch das kommutative Gesetz der Multiplikation gilt, sobald seine Gültigkeit für die zugrunde gelegten Zahlengrößen vorausgesetzt wird. Da wir dies getan haben, so gilt auch der Pascalsche Satz, ebenfalls deshalb auch der Fundamentalsatz und damit alle Sätze der projektiven Geometrie. Obwohl wir daher zum Beweise der Widerspruchslosigkeit der projektiven Geometrie auch diesen Weg hätten einschlagen können, so dürfte der erste Weg den Vorzug größerer Einfachheit besitzen.

No. 39. Nichteuklidische Geometrie. Spiegelung und Umwendung. Um nun zu einer Definition des Senkrecht-Stehens zu gelangen, die einen von Null verschiedenen Wert der Größe $\varkappa$ ergibt, betrachten wir zwei Punkte P_1 und P_2 als *konjugiert,* deren Koordinaten durch die Gleichung:

(12) $$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \mathfrak{K}$$

verknüpft sind, wo $\mathfrak{K}$ eine von Null verschiedene positive oder negative Konstante ist. Dann ist der Ort der Punkte P_2, die einem Punkte P_1 konjugiert sind, eine Ebene, die wir die *absolute Polarebene* des Poles P_1 nennen wollen, und es gehört umgekehrt jeder Ebene, deren Gleichung durch (7) dargestellt ist, ein *absoluter Pol* $\left(\frac{A\mathfrak{K}}{D}, \frac{B\mathfrak{K}}{D}, \frac{C\mathfrak{K}}{D}\right)$ derart zu, daß die absolute Polarebene jedes Punktes der Ebene deren Pol enthält. Hierbei ist der absolute Pol jeder Ebene durch O ein uneigentlicher Punkt und deren absolute Polarebene die uneigentliche oder unendlich ferne Ebene. Ebenso gehen die absoluten Polarebenen der Punkte einer Geraden durch eine andere Gerade, die *absolute Polare* der ersten Geraden, und diese Beziehung ist wechselseitig, weil jedem Punkte der einen Geraden jeder Punkt der anderen konjugiert ist.

Nunmehr sollen *zwei Geraden* dann *senkrecht aufeinander* heißen, wenn die eine die absolute Polare der anderen schneidet. Da die Koordinaten aller Punkte einer Geraden durch O in der Form $r\alpha$, $r\beta$, $r\gamma$ enthalten sind, wenn α, β, γ die Richtungskosinus der Geraden sind, so stehen die absoluten Polarebenen aller Punkte einer solchen Geraden auch in dem früheren Sinne auf ihr senkrecht und bestimmen als ihre absolute Polare eine uneigentliche Gerade. Zugleich sieht man, daß je zwei Gerade durch O, die der neuen Definition gemäß aufeinander senkrecht stehen, es auch nach der alten tun.

Um von hier aus zu den Bewegungen zu gelangen, definieren wir als *Spiegelung an einer Ebene* σ die kollineare Spiegelung (vgl. die Schlußbemerkung von § 2) an der Ebene σ und ihrem absoluten Pol S, vorausgesetzt, daß S nicht in σ liegt. Dann sind die Spiegelungen an den Ebenen durch O solche in gewöhnlichem Sinne. Wir beweisen nun zuerst, daß *durch jede solche Spiegelung je zwei konjugierte Punkte in ebensolche übergehen, also auch je zwei senkrechte Geraden in ebensolche.* Dies ist selbstverständlich für je zwei konjugierte Punkte der Ebene σ und folgt leicht für je zwei konjugierte Punkte, die mit S in einer Geraden liegen. Denn sind A, A_1 zwei konjugierte Punkte eines solchen Strahles SS_1 (S_1 in σ) und A', A_1' ihre Spiegelbilder, so sind A und A' einerseits und A_1 und A_1' andererseits durch S und S_1 harmonisch getrennt, also $(SS_1AA') = (S_1SA_1A_1')$ $= -1$, d. h. auch A' und A_1' sind ein Paar der durch die Paare S, S_1 und A, A_1 bestimmten absoluten Involution. Ist nunmehr α die Polarebene irgend eines Punktes A und α' resp. A' ihre Bilder,

so sind die Punkte der Geraden $(\sigma\alpha)$, die ja zugleich auf α' liegen, zu jedem Punkte der Geraden SA konjugiert, also auch zu A'. Da ferner nach dem Obigen auch dem Punkte $A_1 = (SA, \alpha)$ der zu A' konjugierte A_1' in unserer Spiegelung entsprechen muß, so enthält α' von der Polarebene des Punktes A' einen Punkt und eine Gerade, fällt also mit ihr zusammen, wofern der Punkt nicht auf der Geraden liegt oder A_1 nicht mit S_1 zusammenfällt. Dann ginge die Polarebene von $A_1 = S_1$ durch A und S, A_1 wäre also ein sich selbst konjugierter Punkt. Da aber nicht alle Punkte von σ sich selbst konjugiert sein können — man beweist leicht, daß die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 - \mathfrak{K} = 0$ keinen linearen Faktor enthalten kann —, so gibt es einen solchen nicht auf (α, σ) gelegenen Punkt B auf α, daß seiner Polarebene β die Polarebene β' des Spiegelbildes B' von B in unserer Spiegelung entspricht. Dann entspricht also auch dem Paar konjugierter Punkte A, B das Paar A', B', so daß auch in diesem Falle α' mit der Polarebene von A' zusammenfallen muß. Hiermit ist unsere obige Behauptung bewiesen.

Wir beweisen nun den wichtigen Hilfssatz (vgl. Satz 28 auf S. 35): *Durch die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ an drei Ebenen durch dieselbe Achse g_1 entsteht wieder eine solche Spiegelung.* Zu diesem Zwecke betrachten wir die kollinearen Spiegelungen, die diese Raumspiegelungen auf der absoluten Polare g von g_1 hervorrufen. Sie verwandeln ja jedenfalls die absolute Involution auf g in diese selbst. Daß in der Tat die konjugierten Punktepaare von g eine Involution bilden, zeigt die Bestimmung der Punkte von g durch projektive Abszissen u, die auf ein Paar konjugierter Punkte P und P_1 als Null und Unendlichkeitspunkt und den Punkt mit den Koordinaten $\frac{x + x_1}{2}$, $\frac{y + y_1}{2}$, $\frac{z + z_1}{2}$ als Einheitspunkt bezogen sind. Denn dann sind die Koordinaten irgend eines Punktes von g in der Form $\frac{x + u x_1}{1 + u}$, etc. dargestellt, so daß zwischen den Abszissen u und u_1 irgend zweier konjugierter Punkte die Gleichung $uu_1 = L$ besteht, wo $x^2 + y^2 + z^2 - \mathfrak{K} + L(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - \mathfrak{K}) = 0$ ist[1]. Die

1) Will man den Fall, daß g eine unendlich ferne Gerade ist, die Gerade g_1 also durch den Anfangspunkt O geht, nicht als durch die euklidischen Spiegelungen erledigt ansehen, so kann man unter xyz und $x_1 y_1 z_1$ die Richtungskosinus zweier senkrechten Strahlen durch O in der Ebene Og verstehen. Dann sind $\frac{x + u x_1}{\sqrt{1 + u^2}}$, etc die Richtungskosinus irgend einer Geraden durch O.

Spiegelung an den konjugierten Punkten m und m_1 ist daher nach Formel (12) und (13) auf S. 82 durch:

$$(13) \qquad u' = \frac{a-u}{1-\lambda a u}$$

dargestellt, wo $\lambda L = 1$ und $a = \frac{2m}{1+\lambda m^2}$ die Abszisse des dem Nullpunkte entsprechenden Punktes ist. Daraus ergibt sich wie in Formel (17) auf S. 82 und (40) auf S. 94:

$$(14) \quad 1 - \lambda a^2 = \left(\frac{1-\lambda m^2}{1+\lambda m^2}\right)^2 \text{ und } m \text{ resp. } m_1 = \frac{1}{\lambda a}\left(1 \mp \sqrt{1-\lambda a^2}\right).$$

Verbinden wir diese Spiegelung mit der zweiten: $u'' = \frac{a'-u'}{1-\lambda a' u'}$, so entsteht die Transformation $u'' = \frac{\bar{a}+u}{1+\lambda u \bar{a}}$, wo $\bar{a} = \frac{a'-u}{1-\lambda a a'}$, und verbinden wir endlich diese Transformation mit der dritten Spiegelung $u''' = \frac{a''-u''}{1-\lambda a'' u''}$, so entsteht die Transformation:

$$(15) \qquad u''' = \frac{a'''-u}{1-\lambda a''' u},$$

wo $a''' = \frac{\bar{a}+a''}{1+\lambda \bar{a} a''}$. Um zu zeigen, daß hierdurch eine wirkliche Spiegelung an zwei konjugierten Punkten S''' und S_1''' dargestellt wird, zeigen wir, daß $1 - \lambda a'''^2$ ein volles Quadrat ist, daß sich also die beiden spiegelnden Punkte nach (14) auf rationalem Wege ergeben. In der Tat zeigt eine einfache Rechnung, daß:

$$(16) \quad 1 - \lambda a'''^2 = \frac{(1-\lambda a^2)(1-\lambda a'^2)(1-\lambda a''^2)}{(1-\lambda(a a' + a a'' - a' a''))^2}$$
$$= \left\{\frac{(1-\lambda m^2)(1-\lambda m'^2)(1-\lambda m''^2)}{(1+\lambda m^2)(1+\lambda m'^2)(1+\lambda m''^2)(1-\lambda(a a' + a a'' - a' a''))}\right\}^2$$

ist[1]).

---

in Og und die Involution auf g ist durch $u u_1 = -1$ dargestellt, so daß wir in den Formeln (13) bis (15) nur $\lambda = -1$ zu setzen brauchen, um ebenso wie dort schließen zu können.

1) Daß die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ in bezug auf die Punktepaare S, S_1; S', S_1'; S'', S_1'' einer Involution $\mathfrak{J}$ wieder eine Spiegelung $\mathfrak{S}'''$ liefert, ergibt sich folgendermaßen aus dem Pascalschen Satze für Kegelschnitte. Man denke sich, was durch lineare Konstruktion möglich, durch $\mathfrak{J}$ irgendeinen Kegelschnitt $\mathfrak{k}$ gelegt. Geht dann bei den kollinearen Spiegelungen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ mit den Zentren S, S', S'' und ihren Polaren in bezug auf $\mathfrak{k}$ als Achsen der Punkt A von $\mathfrak{k}$ in A', dieser in A'' und dieser in A''' über, ferner umgekehrt A''' durch $\mathfrak{S}$ in $\bar{A}$ und dieser durch $\mathfrak{S}'$ in $\bar{\bar{A}}$, so lehrt eben der Pascalsche Satz, daß $\bar{\bar{A}}$ durch $\mathfrak{S}''$ wieder in A übergeht. Die Kollineation $\mathfrak{S}''\mathfrak{S}'\mathfrak{S}$ ist also sicher involutorisch. Das Zentrum S''' der dadurch auf $\mathfrak{k}$ bestimmten Involution muß aber notwendig auf SS' liegen, denn

Um nunmehr zu beweisen, daß auch die Aufeinanderfolge der drei Raumspiegelungen $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ eine Spiegelung $\mathfrak{S}'''$ sei, betrachten wir irgend zwei entsprechende Geraden G_1G und G_1G''' durch einen Punkt G_1 von g_1 und die entsprechenden Punkte G und G''' von g. Nun schneiden sich sicher die Verbindungslinien PP''' der Punkte von G_1A mit den entsprechenden von G_1A''' in einem Punkte T von g (vgl. 47. Satz auf S. 48). Würde dann dem mit P''' zusammenfallenden Punkte Q nicht wieder der Punkt P, sondern ein davon verschiedener Punkt Q''' auf G_1G entsprechen, so ginge auch die Gerade QQ''' durch einen zweiten Punkt T''' von g, der dem Punkte T in $\mathfrak{S}'''$ entspricht und von T durch G und G''' harmonisch getrennt wäre, weil P und Q''' durch G_1 und G harmonisch getrennt wären. Da nämlich die Projektivität, die durch die Wiederholung von $\mathfrak{S}'''$ auf G_1G entsteht, G, G_1 und die absolute Involution stehen läßt, so ist sie entweder die Identität oder die Spiegelung an G und G_1, weil sie, bezogen auf diese beiden Punkte als Null- und Unendlichkeitspunkt die Form $\beta u + \gamma \bar{u} = 0$ haben muß (vgl. den 64. Satz auf S. 68); soll sie die Involution $uu_1 = \bar{L}$ in diese selbst verwandeln, so muß $\beta^2 = \gamma^2$ oder $\beta = \pm \gamma$ sein. Die durch die Paare G, G''' und T, T''' bestimmte Involution hätte also, weil $(GG'''TT''') = -1$ wäre, entgegen dem oben gefundenen Resultate keine Deckelemente (vgl. die Bemerkung zum 62. Satze auf S. 66). Daher müssen T und T''' miteinander, also mit einem der beiden Punkte S''' oder S_1''' zusammenfallen. Nennen wir diesen Punkt S''', so ist $\mathfrak{S}'''$ die Spiegelung an der Ebene g_1S_1'''. Denn nun entsprechen in $\mathfrak{S}'''$ die Strahlen $S'''P$ nicht nur dann sich selbst, wenn P auf GG_1 selbst liegt, sondern nach dem Satze von Desargues auch dann, wenn P der Ebene Gg_1 angehört. Es entsprechen daher alle Strahlen durch S''' sich selbst, also, weil dies für die Punkte von g gilt, auch jedem Punkte sein Spiegelbild für S''' und S_1g'''. Hiermit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Aus diesem Satze ergibt sich zuerst, daß *die Verwandtschaft $\mathfrak{T}$, die durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an den Ebenen σ*

die Achse muß den sich selbst entsprechenden Pol von SS' enthalten. Wir haben diesen Beweis, den man bei H. Wiener, Über die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften, Leipz. Ber. 1891, S. 669, findet, im Texte nicht benutzt, weil wir sonst keine Veranlassung haben, auf die projektive Erzeugung der Kegelschnitte einzugehen. Überdies dürfte die im Texte gegebene rationale Darstellung der Deckelemente von $\mathfrak{S}'''$ die Frage am gründlichsten erledigen.

und σ' entsteht, auf mannigfache Weise durch die Aufeinanderfolge von zwei andern Spiegelungen an Ebenen durch $g_1 = (\sigma, \sigma')$ erzeugt werden kann, so zwar, daß die eine Ebene τ durch g_1 noch beliebig angenommen werden kann, wodurch dann die andre τ' bestimmt ist. Ist $\sigma \perp \sigma'$, d. h. treffen σ und σ' die absolute Polare g von g_1 in zwei konjugierten Punkten, so entspricht bei der Verwandtschaft $\mathfrak{D}$ auch jeder Punkt von g sich selbst und jedem beliebigen Punkte P der vierte harmonische von P in bezug auf die beiden Punkte, in denen der Strahl durch P die Achsen g und g_1 trifft; denn dann muß auch stets $\tau \perp \tau'$ sein. Eine solche Verwandtschaft, die durch die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen an zwei zueinander senkrechten Ebenen entsteht, nennen wir eine *Umwendung* um die Schnittlinie dieser Ebenen.

Aus unserm Hilfssatze ergibt sich weiter, daß die Aufeinanderfolge von drei Spiegelungen an irgend drei Ebenen σ, σ', σ'', die nicht durch dieselbe Achse gehen, auf mannigfache Weise durch drei andre so ersetzt werden kann, daß die Schnittlinie der ersten oder letzten beiden Ebenen eine beliebige Gerade h durch den Schnittpunkt der drei Ebenen ist. Man kann nämlich z. B. zuerst die Ebenen σ und σ' durch die Ebene τ durch h und (σ, σ') und eine dadurch bestimmte Ebene τ' ersetzen und alsdann die Ebenen τ' und σ'' durch die Ebene $\bar{\tau}$ durch h und (τ, σ'') und eine dadurch bestimmte Ebene τ''.

No. 40. Darstellung jeder Bewegung durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen. Gültigkeit der Postulate. Hieraus können wir den folgenden wichtigen Satz beweisen: *Die Aufeinanderfolge von drei, also auch von beliebig viel Umwendungen kann durch die Aufeinanderfolge von höchstens zwei Umwendungen ersetzt werden.* Sind nämlich a, b, c die drei Umwendungsachsen und d irgendeine Gerade, die alle drei trifft, so ersetze man die drei Umwendungen durch die Spiegelungen an den folgenden Ebenen: 1. α durch a und $\perp [a, d]$, 2. $[a, d]$, 3. $[b, d]$, 4. σ durch b und $\perp [b, d]$, 5. σ' durch c und den Punkt (b, d) und 6. δ durch c und $\perp \sigma'$. Dann kann man die beiden Spiegelungen an den Ebenen σ und σ' durch zwei andere an τ und γ durch (σ, σ') so ersetzen, daß auch τ durch d geht, weil σ und σ' beide den Punkt (b, d) enthalten. Die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an den Ebenen $[a, d]$, $[b, d]$ und τ ist daher nach unserm Hilfssatze einer einzigen Spiegelung an β äquivalent, so daß wir die vier Spiegelungen an den Ebenen α, β, γ, δ übrig behalten. Sind die drei ersten Spiegelungen nicht

einer einzigen äquivalent, so kann man sie nach dem Obigen durch Spiegelungen an drei andern Ebenen α_1, β_1, γ_1 so ersetzen, daß die Gerade $(\beta_1, \gamma_1) \perp \delta$ wird. Dann kann man schließlich die Spiegelungen an β_1 und γ_1 durch zwei andre an β_2 und γ_2 des Büschels so ersetzen, daß $\beta_2 \perp \alpha_1$ wird. Unsre drei Umwendungen sind also durch vier Spiegelungen so ersetzt, daß $\alpha_1 \perp \beta_2$ und $\gamma_2 \perp \varepsilon$ ist, also durch *zwei* Umwendungen. Dasselbe gilt auch in dem ausgeschlossenen Falle, weil die Aufeinanderfolge von zwei Spiegelungen durch zwei Umwendungen ersetzt werden kann, wie durch zweimalige Einschiebung der Spiegelung an einer zur Schnittlinie der beiden Ebenen senkrechten Ebene hervorgeht. Schneiden sich die Achsen der beiden Umwendungen und sind sie zugleich senkrecht zueinander, so ergibt sich eine einzige Umwendung.

Definieren wir also eine *Bewegung* als entstanden durch die *Aufeinanderfolge von beliebig viel Umwendungen*, so können wir jede Bewegung als durch höchstens zwei Umwendungen erzeugt annehmen. Um zu beweisen, daß die so definierte Bewegung die Postulate in § 3 erfüllt, zeigen wir zuerst, daß *eine Bewegung* $\mathfrak{B}$, *bei der ein Punkt* A, *eine Halbgerade* $(A)B$ *und eine Halbebene* $(AB)C$ *sich selbst entsprechen, nur die Identität sein kann.* Zunächst sieht man, daß $\mathfrak{B}$ keine Umwendung sein kann. Denn von dieser müßte AB eine Achse sein; dann würde sie aber die beiden Seiten der Ebene ABC vertauschen. Ist also $\mathfrak{B}$ auf zwei Umwendungen oder vier Spiegelungen reduziert, so kann man die zweite und dritte Ebene dieser Spiegelungen durch A legen, woraus folgt, daß A auch bei der Aufeinanderfolge der ersten und vierten Spiegelung fest bleiben muß. Das ist aber nur in folgenden vier Fällen möglich, wenn nämlich erstens auch die erste und vierte Ebene durch A gehen, oder zweitens die erste Ebene A enthält und die vierte mit der absoluten Polarebene von A zusammenfällt, oder drittens die erste und vierte Ebene zusammenfallen, oder viertens die erste und vierte Ebene senkrecht aufeinanderstehen und A auf der Verbindungslinie ihrer absoluten Pole liegt. Wenn nämlich A nicht wie in den beiden ersten Fällen bei allen vier Spiegelungen sich selbst entspricht, so muß, falls A' das Bild von A in der ersten Spiegelung $\mathfrak{S}$ ist, A das Bild von A' in der vierten Spiegelung $\mathfrak{S}'''$ sein. Es müssen daher A und A' auf der Verbindungslinie der beiden Spiegelzentren S und S''' liegen und durch die konjugierten Punktepaare S, S_1 und S''', S_1''' harmonisch getrennt sein. Da wir aber A nicht als einen sich selbst konjugierten Punkt annehmen

können, so ist dies nur möglich, wenn die beiden Paare dem dritten und vierten Falle entsprechend zusammenfallen.

Was nun die vier Fälle betrifft, so kann im ersten Falle die Aufeinanderfolge der Spiegelungen an vier Ebenen durch denselben Punkt A immer durch zwei Spiegelungen an Ebenen durch A ersetzt werden. Denn man kann dann die Aufeinanderfolge der ersten beiden Spiegelungen sowohl wie diejenige der dritten und vierten durch je zwei andre so ersetzen, daß die zweite und dritte übereinstimmen. Sollten dann die zwei Spiegelungen, aus denen die Bewegung $\mathfrak{B}$ nun noch besteht, nicht zusammenfallen, so könnten wir ihre Aufeinanderfolge durch zwei andre so ersetzen, daß die eine Ebene durch AB geht. Dann müßte es auch die andre Ebene tun, weil die Spiegelung an jeder andern Ebene einen Punkt der Halbgeraden AB niemals in einen Punkt derselben Halbgeraden verwandelt. Ersetzt man daher endlich die beiden Ebenen durch zwei andre so, daß die eine mit ABC zusammenfällt, so muß es auch die andre tun, weil sonst die Halbebene $(AB)C$ nicht in sich selbst überginge. Die Bewegung kann also im ersten Falle in der Tat nur die Identität sein.

Im zweiten Falle kann man die Aufeinanderfolge der ersten drei Spiegelungen, wenn sie nicht einer Spiegelung äquivalent sind, durch drei andre so ersetzen, daß die ersten beiden Ebenen durch AB gehen. Dann muß es aber auch die dritte Ebene tun, weil bei der vierten Spiegelung jede Gerade durch A sich selbst entspricht. Die ersten drei Spiegelungen wären daher doch einer einzigen äquivalent, die Bewegung $\mathfrak{B}$ also eine Umwendung, was ausgeschlossen ist. Im dritten Falle geht aus der Bemerkung, daß sowohl $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}'$ als $\mathfrak{S}''$ und $\mathfrak{S}'''$ mit einander vertauschbar sind, hervor, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}'''\mathfrak{S}''\mathfrak{S}'\mathfrak{S} = \mathfrak{S}''\mathfrak{S}'''\mathfrak{S}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''\mathfrak{S}'$ ist, so daß wir wieder auf den ersten Fall kommen. Im vierten Falle endlich können wir $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{S}''\mathfrak{S}'''\mathfrak{S}\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}''\mathfrak{T}'''\mathfrak{T}\mathfrak{S}'$ ersetzen, wo auch die Ebene τ von $\mathfrak{T}$ durch A geht, so daß das Zentrum T''' von $\mathfrak{T}'''$ mit A zusammenfallen muß. Deshalb ist auch $\mathfrak{T}'''$ mit $\mathfrak{S}''$ vertauschbar, so daß wir auf den zweiten Fall zurückkommen. Hiermit ist vollständig bewiesen, daß die Bewegung $\mathfrak{B}$ nur die Identität sein kann.

Um hieraus die Gültigkeit des 11. Postulats darzutun, wird es offenbar genügen, die Umkehrbarkeit des Winkels und der Strecke durch je eine Bewegung zu beweisen. Nun lehren die Formeln (13) und (14), unter welchen Umständen ein Punkt P durch Spiegelung in den Punkt Q der Geraden PP_1 mit der projektiven Abszisse a

übergeführt werden kann, nämlich dann, wenn:

$$(16)\ \sqrt{1-\lambda a^2} = (1+a)\frac{\sqrt{1-\varkappa\left\{\left(\frac{x+ax_1}{1+a}\right)^2+\left(\frac{y+ay_1}{1+a}\right)^2+\left(\frac{z+az_1}{1+a}\right)^2\right\}}}{\sqrt{1-\varkappa(x^2+y^2+z^2)}}$$

reell, der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen also positiv ist, und zugleich unser Größenbereich durch die Operationen $\sqrt{1+g^2+h^2}$ und $\sqrt{1-\varkappa s^2}$ erweitert wird. Ist daher $\varkappa < 0$, so ist die Strecke PQ stets durch eine Spiegelung umkehrbar und für $\varkappa > 0$ dann, wenn $\mathfrak{K} - OP^2$ und $\mathfrak{K} - OQ^2$ dasselbe Vorzeichen haben, wo die Strecken im euklidischen Sinne gemeint sind. Betrachten wir daher für $\varkappa > 0$ nur diejenigen Punkte P als *eigentliche*, für welche $\mathfrak{K} - OP^2$ positiv ist, wozu auch der Anfangspunkt O gehört, so ist die Strecke PQ durch eine Spiegelung dann und nur dann umkehrbar, wenn ihre Endpunkte entweder beide eigentlich oder beide uneigentlich sind. Fügen wir zu dieser Spiegelung noch eine solche an irgend einer Ebene PQR, so haben wir eine *Umwendung, die die Strecke PQ umkehrt.* Zugleich sieht man, daß es nur eine Bewegung gibt, die P in Q verwandelt, $\overrightarrow{QP}$ in $\overrightarrow{PQ}$ und die Halbebene $(PQ)R$ stehen läßt, nämlich obige Umwendung; denn die Verbindung jeder solchen Bewegung mit unserer Umwendung gibt nach unserm Satze die Identität. Hiermit ist die Gültigkeit des 13. Postulats bewiesen.

Soll weiter die Halbgerade $(P)Q$ in $(P)R$ übergeführt werden, so betrachten wir zuerst eine der beiden Spiegelungen, die nach dem Obigen die zu P auf PQ und PR konjugierten Punkte Q_1 und R_1 vertauscht. In der Tat können für $\varkappa > 0$ die konjugierten Punkte P_1 eines eigentlichen Punktes P nur uneigentliche sein. Denn wäre sowohl $\mathfrak{K} - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ als $\mathfrak{K} - x_1{}^2 - y_1{}^2 - z_1{}^2 > 0$, so wäre auch für jedes u: $\mathfrak{K} - \left(\frac{x+ux_1}{1+u}\right)^2 - \left(\frac{y+uy_1}{1+u}\right)^2 - \left(\frac{z+uz_1}{1+u}\right)^2 > 0$, d. h. jeder Punkt der Geraden PP_1 wäre ein eigentlicher, was aber sicher für den unendlich fernen Punkt von PP_1 nicht gilt. Da Q_1R_1 in der absoluten Polare von P liegt und das Zentrum einer Spiegelung, die die Strecke vertauscht, notwendig der Geraden Q_1R_1 angehört, so geht die Ebene der Spiegelung durch P, die Spiegelung vertauscht also die beiden Geraden PQ_1 und PR_1 oder PQ und PR. Fügen wir zu dieser Spiegelung, je nachdem sie die Halbgerade $(P)Q$ in $(P)R$ oder ihr Komplement verwandelt, die Spiegelung an der Ebene PQR oder der absoluten Polare von P, so erhalten wir die *Umwendung, die den Winkel QPR umkehrt,* und es ist nach unserm Satze wieder

leicht zu beweisen, daß es nur eine solche Bewegung gibt, so daß auch die Gültigkeit des 12. Postulats bewiesen ist.

Nunmehr kann man wie in § 3, S. 44 zeigen, daß man jeden rechten Winkel BAC in jeden andern rechten Winkel $B'A'C'$ (A und A' eigentliche Punkte) durch die Aufeinanderfolge von zwei Umwendungen, also durch eine Bewegung überführen kann, und aus unserm Satze geht wieder hervor, daß es nur eine solche Bewegung gibt. Damit ist also auch die Gültigkeit des *11. Postulats* dargetan.

Daß unsre Bewegungen eine Gruppe bilden, wie das 10. Postulat besagt, und daß die Umkehrung jeder Bewegung wieder eine solche ist, leuchtet sofort ein. Es frägt sich also nur noch, wie es mit dem 9. Postulate steht, daß *den Punkten einer Strecke wieder die Punkte der entsprechenden Strecken entsprechen.* Wir bemerken zuerst, daß für $\varkappa > 0$ einem eigentlichen Punkte A bei jeder Bewegung $\mathfrak{B}$ wieder ein eigentlicher Punkt entsprechen muß. Denn wäre B ein uneigentlicher Punkt und ginge durch $\mathfrak{B}$ der rechte Winkel BAC in $B'A'C'(A' = B)$ über, so wäre die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{B}$ und derjenigen Bewegung $\mathfrak{B}$, welche $B'A'C'$ in ABC überführt, wo $\bar{C}$ in der Halbebene $(AB)C$ liegt, eine Umwendung, die die Strecke $\overline{AB}$ umkehrt, was nach dem Obigen nur dann möglich wäre, wenn auch B ein eigentlicher Punkt ist.

Nehmen wir nun weiter an, daß die der Geraden AB angehörenden konjugierten Punkte A_1 und B_1 der Endpunkte A und B einer Strecke AB nicht auf dieser liegen, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß C auf AB liegt, die, daß die beiden Doppelverhältnisse (A_1ABC) und $B_1BAC)$ positiv sind. Denn dann und nur dann liegen sowohl B und C auf derselben Seite von A als auch A und C auf derselben Seite von B. Gehören daher auch die konjugierten Punkte A_1', B_1' zu den Punkten A', B', in die A und B durch irgend eine Bewegung übergehen, ebenfalls der Strecke $\overline{A'B'}$ nicht an, so muß wegen der Gleichheit der entsprechenden Doppelverhältnisse auch der C entsprechende Punkt C' auf $\overline{A'B'}$ liegen. Für $\varkappa > 0$ ist nun unsre Bedingung sicher ausnahmslos erfüllt, so daß für diesen Fall auch die Gültigkeit des 9. Postulats dargetan ist.

Für $\varkappa < 0$ ist es aber notwendig, den anfangs aufgestellten Begriff der Strecke zu modifizieren, weil dann auch die eigentlichen Punkte in unendlich ferne übergehen und umgekehrt. Wir können dann aber auch die unendlich fernen Punkte als eigentliche betrachten

— auf eine andre Auffassung kommen wir sogleich — und *als Punkte einer Strecke* $\overline{AB}$ *gerade diejenigen Punkte* C *ansehen, für welche jene beiden Doppelverhältnisse* (A_1ABC) *und* (B_1BAC) *positiv sind.* Dann fällt dieser neue Begriff der Strecke mit dem früher definierten zusammen, sobald B auf der Strecke $\overline{AA_1}$ in dem früheren Sinne liegt, weil dann wegen $\varkappa < 0$ auch A auf $\overline{BB_1}$ liegen muß. Wir kommen hier also genau auf dieselbe Beschränkung der Streckenlänge, die wir bei allen unsern Kongruenzbetrachtungen machen mußten. Um aber sicher zu gehen, daß auch unsre projektiven Betrachtungen bei Zugrundelegung dieses neuen Streckenbegriffs gültig bleiben, brauchen wir nur darauf hinzuweisen, daß wir für diese die Postulate nur für einen beschränkten Bereich anwenden, also z. B. für alle Punkte P, für die $\overline{OP}^2 < -\mathfrak{K}$ ist. Denn die konjugierten Punkte aller Punkte dieses Bereichs liegen außerhalb desselben, wie daraus folgt, daß die absolute Polarebene von P aus der Polarebene von P in demjenigen Systeme, welches durch Vertauschung des Vorzeichens von $\mathfrak{K}$ aus dem angenommenen entsteht, durch Spiegelung an O hervorgeht. Jedenfalls ist nun auch für $\varkappa < 0$ das 9. Postulat erfüllt, wenn wir Strecken ausschließen, deren Endpunkte einander konjugiert sind.

Die hier beim Aufbau der Geometrie daraus entstehende Schwierigkeit, daß alle Punkte eigentliche sein können (vgl. den 123. Satz), konnte in Beziehung auf die projektiven Postulate dadurch vermieden werden, daß die zur Definition der uneigentlichen Elemente dienenden Konstruktionen innerhalb eines beschränkten Gebiets, z. B. innerhalb eines Tetraeders vorgenommen werden können. Die Postulate 9—12 der Bewegung aber müßten hierfür etwas abgeändert werden. Beschränkt man diese nämlich auf die Bewegungen um je einen festen Punkt, so können die Begriffe der Umwendung, die von senkrechten Geraden und Ebenen und daraus der des absoluten Polarsystems und besonders der Pascalsche Satz und somit auch der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie dennoch wie in § 3 entwickelt werden. Nunmehr kann man die Umwendung nochmals auf projektivem Wege wie auf S. 117 definieren und findet, daß eine solche Umwendung für jede eigentliche Achse mit der ursprünglichen übereinstimmt. Definiert man daher eine beliebige Bewegung wiederum als entstanden durch die Aufeinanderfolge von beliebig viel Umwendungen, so kann man genau wie in diesem Paragraphen für eine solche die Gültigkeit des 11. Postulats nachweisen, wenn man noch das 13. Postulat von der Umkehrbarkeit der Strecke hin-

zunimmt[1]). Damit nun bei den ursprünglichen Bewegungen um je einen festen Punkt O keiner der eigentlichen Punkte, die für die Beweise gebraucht werden, aus einem beschränkten Gebiete heraustrete, beschränken wir uns für jeden Punkt O auf die Punkte derjenigen Strecken $\overline{OA'}$, welche aus einer Strecke $\overline{OA}$ durch die Bewegungen um O entstehen, oder einer Kugel um O mit dem Halbmesser $\overline{OA}$ angehören, und betrachten nur die Bewegungen um solche Punkte, die innerhalb einer solchen Kugel liegen. Wir haben einen solchen Weg nicht wirklich eingeschlagen, weil er dem ersten Verständnisse zu große Schwierigkeiten entgegengestellt hätte, glauben aber, daß ihn der Leser nachträglich leicht wird verfolgen können.

No. 41. Unbeweisbarkeit des Parallelenaxioms. Hiermit ist in aller Vollständigkeit bewiesen, daß mit unseren Postulaten sowohl ein verschwindender als ein von Null verschiedener positiver oder negativer Wert von $\varkappa$ vereinbar ist. Da aber, wie wir im vorigen Paragraphen (S. 99) gesehen haben, die Summe der Winkel in jedem Dreieck kleiner, gleich oder größer wie ein gestreckter Winkel ist, je nachdem $\varkappa$ positiv, Null oder negativ ist, so können wir das Resultat aussprechen:

87. Satz. *Aus den bisherigen Postulaten läßt sich nicht entscheiden, ob die Summe der Winkel in jedem Dreiecke kleiner, gleich oder größer als ein gestreckter Winkel ist.*

Der Leser wird leicht erkennen, daß auch die Hinzunahme des sogenannten Archimedischen Postulats (s. § 8) oder eines Stetigkeitsaxioms zu einer solchen Entscheidung nicht ausreicht. Denn von den Größen, durch die wir unsere Geometrien konstruiert haben, hatten wir ja zunächst vorausgesetzt, daß sie die gewöhnlichen rationalen und irrationalen Zahlen seien. Wenn wir auch diesen Umstand nie benutzt haben, sondern nur die Eigenschaft unserer Größen, daß sie den Rechnungsgesetzen und den Sätzen des Größer- und Kleiner-Seins genügen, so zeigen doch unsere Entwicklungen, daß ein von Null verschiedener Wert der charakteristischen Konstanten $\varkappa$ mit *jedem* solchen Größensystem, also auch mit dem der gewöhnlichen Zahlen vereinbar ist. Nun gibt es aber allgemeinere Größen dieser Art, und mit ihrer Hilfe läßt sich nach dem Vorgange von Dehn[2]) zeigen, daß selbst eine bestimmte Annahme über das Ver-

1) Es kann aber auch durch das 14. Postulat von der Zirkelkonstruktion ersetzt werden (vgl. S. 94).

2) Dehn, Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck, In. diss. Göttingen, 1900 (wieder abgedr. Math. Ann. Bd. 53, S. 404).

schwinden oder das Vorzeichen von $\varkappa$ nicht ausreicht, um einen Schluß auf *die Verteilung der uneigentlichen Punkte einer Ebene* zu machen, um also z. B. für $\varkappa = 0$ schließen zu können, daß alle uneigentlichen Punkte der sogenannten unendlich fernen Geraden angehören, oder daß es für $\varkappa < 0$ keine uneigentlichen Punkte, d. h. keine sich nicht schneidenden Geraden einer Ebene gebe, oder daß endlich für $\varkappa > 0$ nicht auch die absoluten Pole uneigentlicher Geraden uneigentlich sein können.

Hierbei wird es genügen, die Frage für die Ebene durchzuführen, da sie sich für den Raum nach unseren Formeln entsprechend gestaltet. Als Größen betrachten wir jetzt nicht nur die aus 1 durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und die beiden Operationen $\sqrt{1+a^2}$ und $\sqrt{1-\varkappa a^2}$, wo a demselbe Bereiche angehört, entstandenen Größen, sondern auch solche Größen, welche durch dieselben Operationen aus 1 und einer *unbestimmten* Größe t entstanden sind. Zwei solche Größen $f(1, t)$ und $\varphi(1, t)$ sind natürlich dann und nur dann als gleich zu betrachten, wenn sie für alle Werte von t gleiche Werte haben, also dieselben Funktionen von t mit übereinstimmenden Koeffizienten sind. Das Wesentliche ist aber die Definition des Größer- und Kleiner-Seins solcher Größen. Diese Definition lautet nach Hilbert: *Von zwei Größen a und b heißt $a > b$, wenn die Differenz $a - b$ positiv bleibt, sobald t in gewöhnlichem Sinne größer als eine gewisse positive ganze Zahl ist*[1]. Daß für dies Größengebiet alle unsere Rechnungsgesetze gelten, folgt unmittelbar aus ihrer Entstehung. Man kann aber auch leicht sehen, daß die Sätze der Anordnung gelten, nämlich: 1. Aus $a > b$ und $b > c$ folgt auch $a > c$ und 2. aus $a > b$ und $c > 0$ folgt auch $ac > bc$ (vgl. Satz 61 und 62). Denn wenn $a - b$ und $b - c$ für ein hinreichend großes t positiv werden, so ist auch $a - c = (a - b) + (b - c)$ positiv. Der zweite Satz folgt daraus, daß das Produkt zweier positiven Zahlen $(c(a - b))$ immer positiv ist.

Auf dies Größensystem bauen wir nun eben dieselbe Geometrie auf wie oben und betrachten zunächst als eigentliche Punkte nur diejenigen, für welche $|x|$ und $|y| < \frac{n}{t}$ ist, wenn nur n irgend eine positive Zahl ist. Dann läßt sich zeigen, daß jede Bewegung der Ebene jeden eigentlichen Punkt wieder in einen eigentlichen verwandelt. Führen wir nämlich zuerst eine Bewegung aus, bei der

1) Hilbert, Grundlagen der Geometrie, § 12.

der Anfangspunkt O fest bleibt, so ist nach den Formeln (V) und (VII) auf S. 78 und 79:

$$x' = \alpha x \pm \beta y, \quad y' = \beta x \mp \alpha y, \tag{17}$$

wo $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ist und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem es sich um eine Umwendung oder Drehung handelt, so daß in jedem Falle $|\alpha|$ und $|\beta| < 1$ ist. Sind daher $|x|$ und $|y| < \frac{n}{t}$, so sind sicher $|x'|$ und $|y'| < \frac{2n}{t}$, weil der absolute Betrag einer algebraischen Summe höchstens gleich der Summe der absoluten Beträge der Summanden ist. Somit ist unsere Behauptung für eine Bewegung mit festem Anfangspunkte bewiesen. Da ferner in den Formeln (17) x' und y' die Koordinaten des bewegten Punktes P' in bezug auf die Achsen OX, OY bedeuten und x, y die Koordinaten desselben Punktes in bezug auf dasjenige System $OX'Y'$, welche aus OXY durch unsere Bewegung entstanden ist, so ergibt sich zugleich, daß ein Punkt, der in bezug auf das ursprüngliche System ein eigentlicher ist, es auch für das andere System in demselben Sinne bleibt.

Wir betrachten zweitens die Schiebung längs der Achse OX (Formel (XI) auf S. 83):

$$x' = \frac{a + x}{1 + \varkappa a x}, \quad y' = \frac{y\sqrt{1 - \varkappa a^2}}{1 + \varkappa a x}, \tag{18}$$

welche O in (a, o) überführt, wo $\varkappa$ eine positive oder negative Zahl im gewöhnlichen Sinne bedeuten möge. Nun ist doch:

$$2 - \frac{1}{1 + \varkappa a x} = \frac{1 + 2\varkappa a x}{1 + \varkappa a x} \tag{19}$$

stets positiv, wenn $|a|$ und $|x| < \frac{n}{t}$ sind, weil Zähler und Nenner der rechten Seite positiv sind. Ebenso ist dann $\sqrt{1 - \varkappa a^2} < 2$, weil $|\varkappa a^2| < 1$ ist. Es geht folglich auch bei obiger Schiebung jeder eigentliche Punkt in einen ebensolchen über, und zugleich ergibt sich wie oben, daß ein Punkt, der in bezug auf das System OXY ein eigentlicher ist, dies auch für das System bleibt, das aus diesem durch obige Schiebung hervorgeht, also nach dem Vorigen auch für jedes System mit einem eigentlichen Anfangspunkt. Denn durch die Aufeinanderfolge solcher Transformationen kann die Transformation auf jedes System $O'X'Y'$ erreicht werden. Da ebenso jede Bewegung, die O in den eigentlichen Punkt O' überführt — und nur solche Transformationen werden wir Bewegung nennen dürfen —, durch die Aufeinanderfolge einer Bewegung um den festen Punkt O und einer

Schiebung von O nach O' erzeugt werden kann, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Nun sieht man aber, daß es erstens auch für $\varkappa < 0$ uneigentliche Punkte gibt, d. h. solche mit Koordinaten, die nicht beide dem absoluten Betrage nach $< \frac{n}{t}$ sind. Da jeder solche Punkt mit einem eigentlichen Punkt durch eine eigentliche Gerade verbunden werden kann, so gibt es daher auch eine Geometrie, in der die Summe der Winkel jedes Dreiecks zwar größer als ein gestreckter Winkel ist, in der aber doch eigentliche Geraden vorkommen, die *keinen* eigentlichen Punkt gemein haben, ein einfaches Beispiel zweier solcher Geraden liefern die Achse OX und die Gerade $\frac{x}{a} + y = 1$, wo $a > \frac{n}{t}$ ist.

Zweitens aber sehen wir, daß auch für $\varkappa > 0$ nicht geschlossen werden darf, wie wir schon auf S. 100 hervorheben mußten, daß alle Punkte, deren Koordinaten dem absoluten Betrage nach $< \sqrt{\mathfrak{K}}$ sind, eigentliche Punkte seien, oder daß jedem uneigentlichen Punkte wieder ein eigentlicher konjugiert sei. Denn in unserer Geometrie ist jeder Punkt von OX, für den $\frac{n}{t} < |x| < \sqrt{\mathfrak{K}}$, ein solcher uneigentlicher Punkt, daß der ihm konjugierte Punkt wieder uneigentlich ist. Somit fügt in der Tat das a. a. O. erwähnte Parallelenpostulat von Hilbert eine wesentliche, auch über das 13. Postulat hinausgehende Voraussetzung hinzu.

Aber auch für $\varkappa = 0$ kann man nach Dehn mit Hilfe unseres Größengebiets $[1, t]$ eine Geometrie konstruieren, in der es außer den unendlich fernen Punkten uneigentliche Punkte gibt, wenn man nämlich nur diejenigen Punkte als eigentliche betrachtet, für die $|x|$ und $|y| < n$ sind, wo n irgend eine ganze Zahl ist. Dann beweist man zunächst wieder wie oben, daß jeder eigentliche Punkt durch eine Bewegung wieder in einen eigentlichen übergeht. Nun existieren aber in dieser Geometrie noch alle die uneigentlichen Punkte, deren Koordinaten $> n$ sind, also z. B. die Punkte $(1, t)$, (t, t^2) usw., die nicht auf der unendlich fernen Geraden liegen; denn der Punkt $(1, t)$ z. B. ist der Schnittpunkt der beiden Geraden $x = 1$ und $y = t$, die einander nicht parallel sind.

Diese künstlichen Geometrien sind natürlich nicht anschaulich, weil, wie wir später sehen werden, für sie das Archimedische Postulat nicht gilt, aber sie liefern das folgende wichtige Resultat:

88. Satz. *Aus den bisherigen Postulaten oder auch aus irgend einer Annahme über die Summe der Winkel im Dreieck (vgl. Satz 86) kann nichts über die Schnittpunkte einer Geraden g mit denjenigen Geraden derselben Ebene durch einen Punkt A geschlossen werden, welche A mit Punkten verbinden, die auf derselben Seite von g liegen wie A; im besonderen folgt also aus der Annahme, daß die Summe der Winkel in irgend einem, also auch in jedem Dreiecke gleich zwei Rechten sei, noch* **nicht** *das Parallelenaxiom.*

No. 42. Kürzester Abstand zweier windschiefer Geraden. Schraubung. Diese Bemerkung ist sehr wichtig, wenn es sich um die Bestimmung des sogenannten *kürzesten Abstands zweier windschiefer Geraden*, d. h. einer Strecke $\overline{PQ}$ handelt, die mit zwei windschiefen Geraden g und h rechte Winkel bilden. Hiermit hängt wieder die schon auf S. 45 aufgeworfene Frage nach der Ersetzung irgend einer Bewegung durch eine Schraubung, d. h. die Aufeinanderfolge einer Drehung und einer Schiebung um resp. längs derselben Achse zusammen. Soll nämlich $\overline{PQ}$ mit g und h je einen rechten Winkel bilden, so enthält die auf der Ebene $\varepsilon = [gQ]$ senkrechte Ebene ε_1 durch g, die also auch auf PQ senkrecht steht, den zu Q konjugierten Punkt Q_1 von h. Denn ε_1 schneidet die in Q auf QP senkrechte, also h enthaltende Ebene in der reziproken Polare Q_1P_1 von QP. Es wird also darauf ankommen, das Paar konjugierter Punkte auf h zu finden, das zugleich ein Paar der Involution ist, die von den Paaren rechtwinkeliger Ebenen durch g auf h bestimmt ist. Es ist nun leicht zu sehen, daß diese Aufgabe stets mit dem *Streckenübertrager* lösbar ist.

Betrachten wir nämlich die Gerade h als die Achse OX, so wird es darauf ankommen, x und x' aus den beiden Gleichungen $xx' = \mathfrak{K}$ und $\alpha x x' + \beta(x + x') + \gamma = 0$ zu bestimmen, wo $\frac{\beta}{\alpha} = -n$ und $\frac{\gamma}{\beta} = -m$ ist, wenn m und n die Abszissen der Punkte sind, in denen die auf gO und gU senkrechten Ebenen durch g die h schneiden. Es ist daher:

$$x \text{ resp. } x' = \frac{1}{\varkappa a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \varkappa a^2}\right),$$

wo $a = -\frac{2\beta}{\alpha + \gamma\varkappa}$ ist. Denn dann wird in der Tat $xx' = \mathfrak{K}$ und $x + x' = -\frac{\alpha\mathfrak{K} + \gamma}{\beta}$. Es sind folglich Q und Q_1 die Mittelpunkte der Strecke $\overline{OA} = a$ (s. Formel (40) auf S. 94) und können, da

dies von A gilt, mit dem Streckenabtrager konstruiert werden. Da überdies unsere Involution negatives Doppelverhältnis besitzen muß, so ist $\alpha\gamma > \beta^2$ und deshalb:

$$1 - \varkappa a^2 = \frac{(\alpha - \gamma\varkappa)^2 + 4\varkappa(\alpha\gamma - \beta^2)}{(\alpha + \gamma\varkappa)^2}$$

auch für $\varkappa > 0$ stets positiv. Trotzdem aber dürfen wir nicht den Schluß machen, daß von den Punkten Q und Q_1 stets einer ein eigentlicher sei, da A ein uneigentlicher Punkt sein könnte. Nehmen wir in der Tat in einer der Dehnschen Geometrien auf h zwei konjugierte Punkte Q und Q_1, die beide uneigentlich sind, und durch Q irgendeine eigentliche Ebene ε an, so gibt es noch ein Büschel von Ebenen durch Q_1, die auf ε senkrecht stehen, unter ihnen also sicher eine solche ε_1, die ε in einer eigentlichen Geraden g schneidet und mit h keinen eigentlichen kürzesten Abstand bestimmt. *Wir können also ohne weitere Postulate keinen Schluß auf das Vorhandensein eines solchen kürzesten Abstands machen.*

Dies gilt sogar für $\varkappa = 0$. Denn konstruieren wir den kürzesten Abstand in bekannter Weise dadurch, daß wir von irgend einem Punkte S der Geraden h eine Senkrechte SR zu einer Ebene $[g, k]$ ziehen, wo $k \parallel h$ ist, dann durch R die Parallele zu h bis zu ihrem Schnittpunkte P mit g und durch P die Parallele PQ zu RS bis h ziehen, so ist zwar R stets ein eigentlicher Punkt, aber P und Q brauchen es in der Dehnschen Geometrie nicht zu sein. Auch für zwei Geraden derselben Ebene existiert selbst dann, wenn sie keinen eigentlichen Punkt gemein haben, nicht immer ein eigentlicher kürzester Abstand. In der Tat hängt die Ausführbarkeit der Konstruktion dieses kürzesten Abstands, die Hilbert a. a. O. gegeben hat, wesentlich ab von der Geltung des besonderen, von ihm angenommenen nichteuklidischen Parallelenaxioms.

Macht man aber die Voraussetzung, daß für $\varkappa < 0$ alle Punkte eigentliche seien, für $\varkappa = 0$ alle nicht auf der unendlich fernen Ebene gelegenen und für $\varkappa > 0$ alle Punkte P, für die $(OP)^2 < \mathfrak{K}$ ist, so gibt es in jedem Falle einen eigentlichen kürzesten Abstand, für $\varkappa < 0$ sogar zwei, die aber reziproke Polaren voneinander sind. Dann ist leicht zu sehen, daß jede Bewegung durch eine *Schraubung* ersetzt werden kann. Denn jede Bewegung kann nach dem 40. Satze durch die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ um die Achsen g und h ersetzt werden. Haben die beiden Achsen einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt gemein, so ist hiernach die Bewegung entweder eine Drehung oder eine Schiebung. Sind aber

die beiden Achsen windschief und $\overline{PQ}$ ihr kürzester Abstand, so entsteht die Bewegung auch durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{V}$, wo die Achse g' von $\mathfrak{W}$ in P auf PQ innerhalb der Ebene $[P, h]$ senkrecht steht. Nunmehr ist $\mathfrak{U}\mathfrak{W}$ einer Drehung $\mathfrak{D}$ um die Achse PQ und $\mathfrak{W}\mathfrak{V}$ einer Schiebung $\mathfrak{S}$ längs derselben Achse äquivalent. Unsere Bewegung ist also durch die Aufeinanderfolge einer Drehung um und einer Schiebung längs derselben Achse ersetzt. Nimmt man als Achse h' der Umwendung $\mathfrak{W}$ die Senkrechte in Q auf QP innerhalb der Ebene $[Q, g]$, so entsteht die Bewegung durch die Aufeinanderfolge einer Schiebung und einer Drehung, von denen man leicht sieht, daß sie mit $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{D}$ identisch sind. Die Drehung und die Schiebung, aus denen die Schraubung besteht, sind also in dem Sinne vertauschbar, daß $\mathfrak{S}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}\mathfrak{S}$ ist. Jedenfalls ist es wichtig festzustellen, daß die Ersetzbarkeit jeder Bewegung durch eine eigentliche Schraubung ein Satz ist, der sich aus den bisherigen Postulaten *nicht* beweisen läßt. Er hängt wesentlich zusammen mit den besonderen Annahmen, die über das Schneiden und Nichtschneiden von Geraden derselben Ebene gemacht werden.

No. 43. Cliffordsche Parallelen. Bei der Bestimmung des kürzesten Abstands zweier eigentlicher Geraden g und h haben wir bisher den Fall außer acht gelassen, daß diese Aufgabe *unendlich viele* Lösungen besitzt, daß also die Involution der rechtwinkeligen Ebenen durch die eine Gerade perspektiv zur absoluten Involution auf der anderen Geraden liegt. Für $\varkappa > 0$ ist dieser Fall ausgeschlossen, weil dann für eigentliche Geraden die erste Involution stets negatives, die zweite hingegen positives Doppelverhältnis besitzt. Für $\varkappa = 0$ tritt der Fall für parallele Geraden in gewöhnlichem Sinne ein, aber für $\varkappa < 0$ werden wir auf eine neue Art von Parallelen geführt, die Clifford[1]) entdeckt hat. Um die Bedingungen für einen solchen Parallelismus zu finden, betrachten wir als g die Gerade $y = b$ in der Ebene OXY und als h die Gerade $z = x \operatorname{tg} \alpha$ in der Ebene OXZ und suchen α so zu bestimmen, daß die Senkrechte PR auf g auch auf h senkrecht steht (Fig. 42). Ist $u = (OQ)$ die Abszisse von P, so ist $\frac{x}{u} + \varkappa b y = 1$ die Gleichung

1) Clifford, Preliminary Sketch on Biquaternions, Proc. of the London Math. Soc., t. IV, p. 381—95, 1873 u. F. Klein, Zur Nichteuklidischen Geometrie, Math. Ann. 37, p. 544—72. Vgl. auch W. Vogt, Synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und linearen Linienörter des elliptischen Raumes, Hab. Schr. Karlsruhe, 1909, Leipzig, B. G. Teubner.

der Senkrechten QR zu g; denn sie macht auf OY den projektiven Abschnitt $\mathfrak{K}:b$. Der Punkt R hat daher die Abszisse $(OT) = u(1-\varkappa b^2)$, und die Senkrechte durch T zu h hat folglich die Gleichung $z \operatorname{tg} \alpha + x = u(1-\varkappa b^2)$ (vgl. die Ableitung der Formeln der Umwendung auf S. 78). Soll also diese Senkrechte wieder durch P gehen, so muß $u(1+\operatorname{tg}^2\alpha) = u(1-\varkappa b^2)$ sein, und diese Bedingung ist für jedes u erfüllt, wenn:

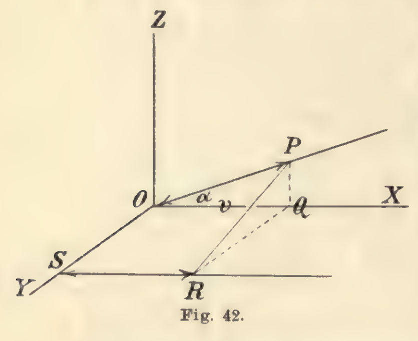


Fig. 42.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa b^2}} \tag{20}$$

ist. Da aber nach Formel (18) (auf S. 84)

$$\sqrt{1-\varkappa b^2} = (SR):(OQ)$$

und außerdem $(OQ) = (OP)\cos\alpha$ ist, so folgt: $\mathbf{(OP) = (SR)}$. Da wegen $\varkappa < 0$ nach dem 1. Hilfsatze auf S. 103 $(OQ) < (SR)$ ist, so können hiernach *die beiden Cliffordschen Parallelen zu g durch O folgendermaßen mit Hilfe des Zirkels konstruiert werden:* Man ziehe in irgend einem Punkte R von g die Senkrechte bis zu ihrem Schnittpunkte Q mit der Senkrechten OX auf der Senkrechten OS zu g innerhalb der Ebene $[Og]$, errichte in Q die Senkrechte zur Ebene $[Og]$ und bestimme deren Schnittpunkte P mit dem Kreise um O mit dem Halbmesser $\overline{SR}$, dann sind OP die beiden gesuchten Parallelen.[1]) Diese Konstruktion ist so eingerichtet, daß in jedem Falle nur eigentliche Punkte benutzt werden. Sonst könnte man die Cliffordschen Parallelen auch mit dem Streckenabtrager konstruieren. Aus Formel (20) folgt nämlich $\operatorname{tg}\alpha = b\sqrt{-\varkappa}$. Nun ist aber $\sqrt{-\mathfrak{K}}$ die Abszisse des Mittelpunktes der Strecke $\overline{OU}$ (Formel (40) auf S. 94 für $a = \infty$), wo U der zu O konjugierte Punkt der Abszissenachse ist, kann also mit dem Streckenabtrager gefunden werden[2]), wenn man U als einen eigentlichen Punkt betrachten könnte. Eine solche Auffassung würde aber dem bisher von uns eingenommenen Standpunkte nicht entsprechen.

Nach unseren Entwicklungen ist jede Gerade, die von O und

---

1) Man beachte die Analogie dieser Konstruktion der Cliffordschen Parallelen mit der auf S. 101 auseinandergesetzten Lobatscheffskijschen. Während hier die Senkrechte auf g benutzt wird, ist es dort die zu OX. Für $\varkappa = 0$ gehen beide Konstruktionen ineinander über.

2) Vgl. hierzu Bonola, Die Nichteuklidische Geometrie, besorgt von Liebmann, Leipzig, Teubner 1908, p. 200.

S aus auf h und g gleiche Stücke abschneidet, gemeinsame Senkrechte von h und g. Es gilt daher auch dasselbe von der Verbindungslinie der Mitten von $\overline{OP}$ und $\overline{SR}$, so daß eine Umwendung um diese $\overline{OS}$ mit $\overline{PR}$ zur Deckung bringt. Wir haben hier also windschiefe Rechtecke mit gegenüberliegend gleichen Seiten. Ferner folgt aus der Kongruenz der Dreiecke OPS und RSP, daß $\sphericalangle OPS = RSP$ ist, daß also *zwei Cliffordsche Parallele mit jeder Transversale gleiche Wechselwinkel einschließen.* Insofern verdienen diese Parallelen ihren Namen in viel höherem Grade als diejenigen von Bolyai und Lobatscheffskij, welche besser Asymptoten genannt würden. Durch jeden Punkt O können hiernach zu jeder Geraden g zwei Parallele verschiedener Art gezogen werden, die in der Ebene durch O liegen, die auf der Senkrechten OS zu g senkrecht steht, und miteinander einen durch Gleichung (20) bestimmten Winkel 2α bilden, wo $b = (OS)$ ist.

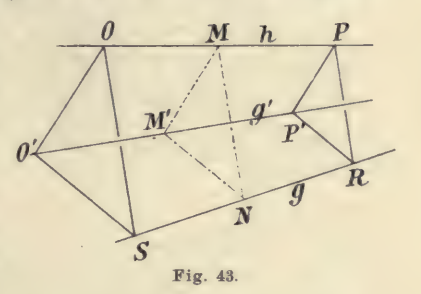


Fig. 43.

Soll der Name von Parallelen hier überhaupt zur Anwendung kommen, so werden wir von Parallelen h und h' derselben Art zu g nur dann reden können, wenn auch h und h' untereinander parallel wären. Sind daher S und R irgend zwei Punkte auf g und O, P resp. O', P' ihre orthogonalen Projektionen auf h und h' (Fig. 43), so ist $OP = \overline{SR} = \overline{O'P'}$, also wegen der geforderten Gleichheit der Wechselwinkel an h und h' $\varDelta OPP' \cong P'O'O$, also auch $\overline{PP'} = \overline{O'O}$. Da aber nach Voraussetzung auch $\overline{SO} = \overline{SO'}$ und $\overline{RP} = \overline{RP'}$ ist, so ist $\sphericalangle OSO' = PRP'$. Fällt also bei einer Drehung um g der Punkt O' nach O'' auf SO, so fällt auch P' nach P'' auf RP. Hiernach entstehen die Parallelen derselben Art zu g aus einer derselben h in folgender Weise: Man konstruiert zuerst alle Geraden, die auf SO und RP von S und R aus gleiche Stücke abschneiden, und unterwirft diese zweitens allen Drehungen um g Dann zeigt in der Tat die Umkehrung unserer Schlußweise, daß eine so aus h entstandene Gerade h' sowohl zu g als zu h parallel ist.

Führen wir die Schraubung $\mathfrak{S}$ aus, die durch die Aufeinanderfolge der beiden Umwendungen um die Verbindungslinie NM der Mitten von $\overline{SR}$ und $\overline{OP}$ und um die Achse RP entsteht, so geht hierbei $\overline{OS}$ in PR über und die beiden Parallelen h und g in sich selbst; dasselbe gilt daher sicher auch für alle die Parallelen, die

OS und PR rechtwinklig schneiden. Es gilt deshalb auch von allen Parallelen derselben Art zu g. Denn ist $O'P' = h'$ aus h durch die Drehung $\mathfrak{D}$ um g entstanden, also auch die Mitte M' von $\overline{O'P'}$ durch dieselbe Drehung aus M, so ist die Schraubung $\mathfrak{S}'$, die durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um $M'N$ und $P'R$ entsteht, mit $\mathfrak{S}$ identisch, weil die Aufeinanderfolge der beiden Schraubungen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}^{-1}$ wegen der Kongruenz $M'NM \simeq P'RP$ zwei entgegengesetzt gleiche Drehungen um g liefert. Die Schraubung $\mathfrak{S}$ ist also gewissermaßen eine *Gleitung des Raumes längs allen Parallelen derselben Art.*

Offenbar wird der Ort der Punkte, die von einer Achse g konstanten Abstand haben, zwei Scharen von Geraden enthalten, die zu g parallel sind. Eine solche Fläche[1]) enthält also beliebig viel Parallelogramme, deren gegenüberliegende Seiten und Winkel je einander gleich sind. Man kann aber umgekehrt leicht sehen, daß je drei Parallelen h, h', h'' eine solche Fläche bestimmen. Denn jede Transversale k der drei Parallelen bildet jedenfalls gleiche Winkel mit ihnen, und da die drei Parallelen in sich bewegt werden können, so sind auch alle diese Winkel und die Abschnitte auf den Transversalen, die von drei Parallelen gemacht werden, untereinander gleich. Sind OX und OZ die Halbierungslinien des Winkels (h, k) und OY (Fig. 42) die Senkrechte zu seiner Ebene, so schneidet die Parallele durch einen Punkt P von h zu OY die Ebene XOY in einem solchen Punkte R, daß die Parallele g durch R zu h die Rotationsachse der Fläche liefert, während die Vertauschung von OX und OZ die konjugierte Gerade ergeben würde. Ob freilich eine dieser beiden Geraden eine eigentliche ist, darüber läßt sich im allgemeinen nichts aussagen, wie schon der Fall der oben be-

1) Daß auch auf dieser Fläche die euklidische Geometrie gilt, können wir an dieser Stelle, d. h. ohne infinitesimale Betrachtungen oder ein Stetigkeitsaxiom nicht beweisen. Nimmt man aber die Resultate des letzten Paragraphen vorweg, so ergibt sich aus Formel (XVII) auf S. 89 das Linienelement ds in der Form $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{1 - \varkappa(x^2 + y^2 + z^2)} + \varkappa\left(\frac{xdx + ydy + zdz}{1 - \varkappa(x^2 + y^2 + z^2)}\right)^2$. Nun hat aber die Fläche konstanten Abstands e von der Achse OZ die Gleichung: $x^2 + y^2 - e(1 - \varkappa z^2) = 0$, der man für jedes u und v genügt, wenn man setzt $x = e\frac{\cos(\beta v)}{\cos(\alpha u)}$, $y = e\frac{\sin(\beta v)}{\cos(\alpha u)}$, $z = \frac{1}{\sqrt{-\varkappa}}\operatorname{tg}(\alpha u)$. Hieraus folgt $ds^2 = du^2 + dv^2$, wenn $\alpha = \sqrt{-\varkappa}\sqrt{1 - \varkappa e^2}$ und $\beta = \sqrt{1 - \varkappa e^2}$ gesetzt wird. Drückt man $\cos(\alpha u)$ und $\operatorname{tg}(\alpha u)$ durch die Exponentialfunktion aus, so nehmen die Formeln auch für $\varkappa > 0$ eine reelle Form an.

trachteten Fläche lehrt, die aus allen Geraden besteht, dis von OS und PR gleiche Stücke abschneiden; denn in diesem Falle wäre $\sphericalangle(h, k) = R$, also nach Formel (20) $b = (OS) = \sqrt{\mathfrak{K}}$, eine Strecke, welche wir nicht ohne weiteres als eigentlich betrachten dürfen. Für uns mag das Obige über die Cliffordschen Parallelen genügen, Näheres findet man an den o. a. Stellen.

Nr. 44. Parallelenaxiom. Proportionslehre. Desarguesscher Satz. Nachdem wir gesehen haben, daß aus den bisherigen Postulaten weder über das Vorzeichen der Konstanten $\varkappa$ oder die Summe der Winkel im Dreieck (selbst bei Hinzunahme eines Stetigkeitsaxioms) noch über das Schneiden und Nicht-Schneiden von Geraden derselben Ebene etwas geschlossen werden kann, und zwar auch dann nicht, wenn über das Vorzeichen von $\varkappa$ schon eine bestimmte Annahme gemacht ist, wollen wir untersuchen, wie sich die Verhältnisse bei Zugrundelegung gewisser Parallelenaxiome gestalten und etwa vereinfachen.

Wir gehen dabei zuerst von dem eigentlichen Parallelenaxiom aus, und zwar in folgender Form:

Parallelenaxiom. *In einer Ebene läßt sich durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden b stets eine und nur eine Gerade ziehen, die jene Gerade b nicht schneidet. Sie heißt Parallele zu b durch den Punkt A.*

Wir wollen untersuchen, welche Folgerungen sich hieraus und aus den projektiven Postulaten und denjenigen der Bewegung *in der Ebene allein* ziehen lassen. Wir werden also im folgenden den Satz des Desargues noch nicht als gültig ansehen dürfen. Jedenfalls aber kann der Begriff der Umwendung und der des Senkrechtstehens zweier Geraden wie in § 3 entwickelt werden, wobei nur das auf die Auffassung der Umwendung als einer kollinearen Spiegelung Bezügliche fortfällt. Dann ist klar, daß die Parallele durch A zu b nur eine Gerade sein kann, die bei derjenigen Umwendung fest bleibt, welche A und b stehen läßt, d. h. bei der Umwendung um die Senkrechte AB von A auf b. Denn jede andre b etwa nicht schneidende Gerade durch A würde durch obige Umwendung in eine ebensolche von jener verschiedene Gerade verwandelt werden gegen die Behauptung des Axioms. *Die Parallele ist daher die Senkrechte in A auf AB* und demnach dieselbe Gerade, die der ursprünglichen euklidischen Form des Axioms entspricht, das bekanntlich lautet: *Wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben*

Seite innere Winkel bildet, deren Summe kleiner ist als zwei Rechte, so treffen sich die beiden Geraden, wenn man sie auf dieser Seite verlängert. Denn daß für den Fall, in dem die Summe dieser inneren Winkel gleich zwei Rechten ist, kein Schnittpunkt der beiden Geraden vorhanden sein kann, wird meist daraus geschlossen, daß im entgegengesetzten Falle zwei Schnittpunkte vorhanden sein müßten oder aber dieser Schnittpunkt auf zwei Seiten einer Geraden läge. Da unsre früheren Postulate den letzten Fall nicht ohne weiteres ausschließen, so entspricht unsre Form des Parallelenaxioms besser unserm Standpunkte.

Aus dem Axiome und der oben entwickelten Grundeigenschaft der Parallelen ergeben sich die übrigen leicht in bekannter Weise, im besonderen auch der Satz, daß zwei Geraden, die zu einer dritten parallel sind, auch untereinander parallel sind. Hieraus ergibt sich der Begriff des unendlich fernen Punktes jeder Geraden und derjenige der unendlich fernen Geraden.

Durch das Parallelenaxiom kann nun auch das 13. Postulat von *der Umkehrbarkeit der Strecke* auf das zwölfte von der Umkehrbarkeit des Winkels zurückgeführt werden. Denn sind AD und BE die nach derselben Seite gelegenen Senkrechten auf AB, so schneidet die dem 12. Postulate zufolge konstruierte Halbierungslinie des Winkels DAB nach dem Parallelenaxiome die BE, also auch die Halbierungslinie des Winkels EBA in einem Punkte F so, daß die Senkrechten $\overline{FD}$ und $\overline{FE}$ auf AD und BE einander gleich sind. Diese beiden Senkrechten fallen zugleich als Parallelen durch F zu AB in dieselbe Gerade. Die Achse der Umwendung, die $\overline{FD}$ und $\overline{FE}$ vertauscht, ist daher die Senkrechte zu DE und schneidet als Parallele zu AD und BE die AB rechtwinklig. Diese Umwendung läßt also die Gerade AB stehen und vertauscht daher, weil sie die Geraden DA und EB vertauscht, auch die Punkte A und B. Daraus ergibt sich dann in bekannter Weise, daß die Summe der Winkel in jedem Dreiecke gleich zwei Rechten ist.

Um zu den Sätzen des Desargues und des Pascal zu gelangen, entwickeln wir die *Proportionslehre.* Schneiden zwei Parallelen auf zwei Geraden durch O die Strecken $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ und $\overline{OA'}$, $\overline{OB'}$ aus ($AA' \parallel BB'$), so folgt aus der Annahme, daß $\overline{OB} = n \cdot \overline{OA}$ ist, wo n eine positive ganze Zahl ist, in bekannter Weise (Fig. 44) aus kongruenten Dreiecken, daß auch $\overline{OB'} = n \cdot \overline{OA'}$ ist, wie auch umgekehrt aus $\overline{OB} = n \cdot \overline{OA}$ und $\overline{OB} = n \cdot \overline{OA}$ folgt, daß $AA' \parallel BB'$ sein muß (Konstruktion der Parallelen mit Hilfe des Lineals und des

Streckenübertragers); ganz dasselbe läßt sich ebenso zeigen, wenn n irgend eine rationale Zahl ist. Dies sind ja die elementaren Tatsachen, von denen jede Proportionslehre ausgehen muß. Um aber auch den Fall zu erledigen, daß zwischen $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ kein kommensurables oder vielleicht überhaupt kein Zahlenverhältnis besteht, stellen wir die folgende Definition auf:

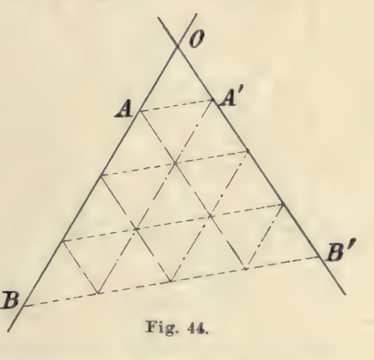


Fig. 44.

Definition. *Die Strecke $\overline{OA}$ hat zur Strecke $\overline{OB}$ dasselbe Verhältnis wie $\overline{OA'}$ zu $\overline{OB'}$ oder in Zeichen*

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'},$$

wenn die zweimal zwei Strecken auf zwei zueinander senkrechten Geraden durch O aufgetragen bewirken, daß $AA' \parallel BB'$ ist.

Von der Beschränkung auf senkrechte Geraden werden wir uns erst allmählich befreien. Wir können zunächst nur die folgenden Schlüsse ziehen:

1. Wenn $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$, so ist auch $\overline{OA'} : \overline{OB'} = \overline{OA} : \overline{OB}$ und $\overline{OB} : \overline{OA} = \overline{OB'} : \overline{OA'}$.

2. Wenn $\overline{OA} \simeq \overline{OA'}$ und $\overline{OB} \simeq \overline{OB'}$ und es liegen A und B einerseits und A' und B' andrerseits gleichzeitig auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von O, so ist $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$.

Denn es sind dann AA' und BB' einander parallel als Senkrechte zur Halbierungslinie des Winkels der beiden Geraden.

Um weitere Schlüsse machen zu können, vor allem zu beweisen, daß die inneren Glieder der Proportion vertauscht werden können, beweisen wir zuerst zwei Hilfsätze:

1. Hilfssatz. ***(Satz vom Höhenschnittpunkt.)*** *Die Senkrechten von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkte.*

Konstruiert man nämlich das dem Dreieck ABC umschriebene Dreieck $A'B'C'$ so, daß $A'B' \parallel AB$, $BC \parallel B'C'$, $CA \parallel C'A'$, so sind die Höhen des ersten Dreiecks die Mittelsenkrechten der Seiten des zweiten, von denen leicht zu sehen ist, daß sie durch einen Punkt gehen.

2. Hilfssatz. ***(Pascalscher Satz.)*** *Sind auf zwei Senkrechten je drei Punkte A, B, C und A', B', C' so angenommen, daß $AB' \parallel BA'$ und $BC' \parallel CB''$, so ist auch $CA' \parallel AC'$ (Fig. 45).*

Schneidet nämlich die Senkrechte von B auf CA' die zweite Senkrechte in D', so ist C Höhenschnittpunkt des Dreiecks $BA'D'$, also auch $CD' \perp BA'$, folglich auch $\perp AB'$. Deshalb ist C auch Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AB'D'$, also $AD' \perp CB'$, folglich auch $\perp BC'$ Daher ist endlich B Höhenschnittpunkt des Dreiecks $AC'D'$ d. h. $BD' \perp AC'$, also $CA' \parallel AC'$, was zu beweisen war.

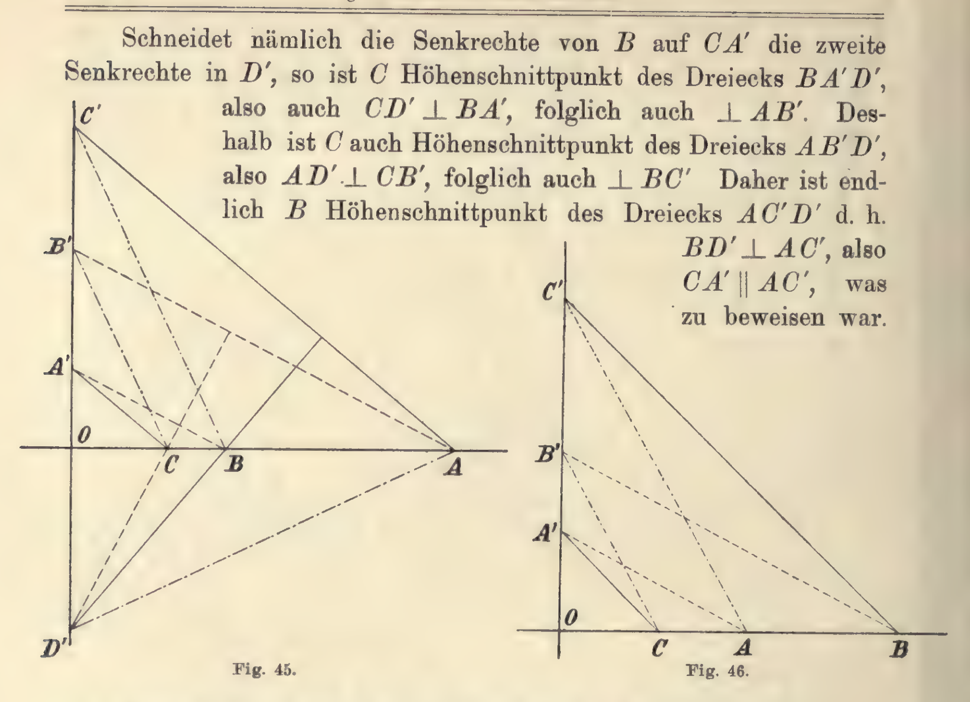


Fig. 45. Fig. 46.

Hieraus ergibt sich der Hauptsatz[1]) der Proportionslehre:

3. Ist $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$, *so ist auch* $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$.

Machen wir nämlich $\overline{OC} \simeq \overline{OA'}$ und $\overline{OC'} \simeq \overline{OB}$ (Fig. 46) so zwar, daß B und C einerseits und C' und A' andrerseits in gleicher Weise zu O liegen, so ist nach 2. $CA' \parallel BC'$. Da aber nach Voraussetzung auch $AA' \parallel BB'$ ist, so folgt aus dem 2. Hilfssatze, daß auch $AC' \parallel CB'$, d. h. $\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OC'} : \overline{OB'}$ oder $\overline{OA} : \overline{OA'} = \overline{OB} : \overline{OB'}$.

---

1) Den ersten vom Archimedischen Postulate unabhängigen Beweis dieses Satzes veröffentlichte Kupffer in den Berichten der Dorpater Naturforscherges. 1893, S. 373ff. (Die Darstellung einiger Kapitel der Elementarmathematik), indem er den Satz von den Peripheriewinkeln des Kreises benützte (andre Beweise benutzen die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone, führen also ein neues Postulat ein und kommen deshalb nicht in Betracht). Die Kupffersche Abhandlung blieb indessen zunächst unbekannt. Nachdem aber der Verf. in Math. Ann. 51, S. 403 (1898) den Beweis geliefert, daß das Rechnen mit Strecken auf einem von der Maßzahl und dem Archimedischen Postulate unabhängigen Wege abgeleitet werden könnte, entwickelte Hilbert in §§ 14—16 seiner Grundlagen der Geometrie (1899) unabhängig davon eine solche Proportionslehre, die sich zugleich auf Axiome der Ebene beschränkte. Den obigen Beweis des Pascalschen Satzes gab der Verf. in Math. Ann. 57 (1902), S. 206.

Nun folgt weiter aus der Definition:

4. Ist $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OA'}:\overline{OB'}$ *und* $\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{OA'}:\overline{OC'}$, *so ist auch* $\overline{OB}:\overline{OC}=\overline{OB'}:\overline{OC'}$.

Hieraus folgt in Verbindung mit 3.:

5. Ist $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OA'}:\overline{OB'}$ *und* $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OA''}:\overline{OB''}$, *so ist auch* $\overline{OA'}:\overline{OB'}=\overline{OA''}:\overline{OB''}$.[1])

Denn nach 3. ist nun auch $\overline{OA}:\overline{OA'}=\overline{OB}:\overline{OB'}$ und $\overline{OA}:\overline{OA''}=\overline{OB}:\overline{OB''}$.

Definieren wir ferner die Summe zweier Strecken wie auf S. 97, so ergibt Figur 47 den Satz:

6. Ist $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{OA'}:\overline{OB'}$, *so ist auch* $\overline{OA}+\overline{OB}:\overline{OB}=\overline{OA'}+\overline{OB'}:\overline{OB'}$.

Ist nämlich $\overline{AC}\simeq\overline{OB}$ und $\overline{A'C'}\simeq\overline{O'B'}$, also, falls die Parallele durch C zu OA' die AA' in D schneidet, $\varDelta\,ACD\simeq BOB'$, so folgt, daß $\overline{DC}\perp\overline{OB}\perp\overline{A'C'}$, also auch $CC'\parallel DA'\parallel AA'\parallel BB'$.

Definieren wir nunmehr zwei Dreiecke als *ähnlich*, wenn sie entsprechend gleiche Winkel haben, so folgt aus 3., daß sich in ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken die Katheten des einen verhalten wie die entsprechenden des andern. Denn es gibt dann ein dem einen Dreieck kongruentes Dreieck, dessen Katheten auf die des andern fallen, während die Hypotenuse der des andern parallel ist. Daraus folgt der allgemeine Satz:

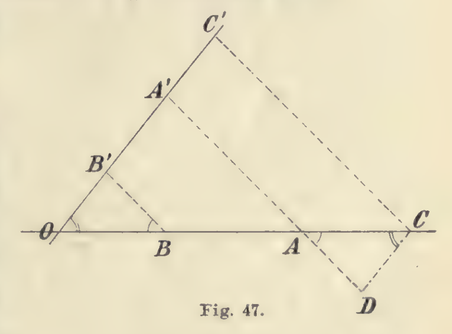


Fig. 47.

7. In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich je zwei Seiten des einen wie die entsprechenden Seiten des andern.

Sind nämlich M und M' die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden der beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$, also falls P, Q, R und P', Q', R' die Fußpunkte der Senkrechten von M und M' auf die Seiten sind, $\overline{MP}\simeq\overline{MQ}\simeq\overline{MR}$ und $\overline{M'P'}\simeq\overline{M'Q'}\simeq\overline{M'R'}$, so folgt aus der Ähnlichkeit der dadurch entstehenden rechtwinkligen Dreiecke:

$$\overline{AR}:\overline{MR}=\overline{A'R'}:\overline{M'R'} \text{ und } \overline{RB}:\overline{MR}=\overline{R'B'}:\overline{M'R'},$$

1) Einen direkten, aber nicht sehr einfachen Beweis dieses Satzes gab neuerdings K. Kommerell, Rein geometrische Begründung der Lehre von den Proportionen und des Flächeninhalts, Math. Ann. 66 (1909), S. 561.

also nach 4.:

$$\overline{AR} : \overline{RB} = \overline{A'R'} : \overline{R'B'},$$

und daraus nach 6.:

$$\overline{AB} : \overline{RB} = \overline{A'B'} : \overline{R'B'},$$

woraus nach 3. folgt:

$$\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{RB} : \overline{R'B'} = \overline{MR} : \overline{M'R'}.$$

Da nun ebenso $\overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{MQ} : \overline{M'Q'}$ ist, so folgt in der Tat aus 5., daß $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AC} : \overline{A'C'}$ oder $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{A'B'} : \overline{A'C'}$ ist[1]). Die Umkehrung des Satzes können wir in folgender Form aussprechen:

8. Liegen die Punkte A, B einerseits und A', B' andererseits mit O so in gerader Linie, daß sie gleichzeitig entweder auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von O liegen, und ist $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$, so ist $AA' \parallel BB'$.

Denn der Definition gemäß ist das vierte Glied einer Proportion durch die drei andern eindeutig bestimmt, so daß es leicht ist, den Satz indirekt zu beweisen.

Fig. 48.

Zum Beweise des *Desarguesschen Satzes* führen wir die Abbildung der *zentralen Kollineation* in bezug auf das Zentrum S, die Achse e und die Fluchtlinie $f' \parallel e$ dadurch ein, daß wir jeder Geraden g diejenige Gerade g' zuordnen, welche den Punkt $G = (g, e)$ mit mit dem Schnittpunkte F' von f' mit der Parallelen durch S zu g verbindet (Fig. 48). Schneidet dann die Verbindungslinie des Zentrums S mit irgend einem Punkte P von g die g' in P' und irgendeine Gerade $\mathfrak{g}'$ durch P' die e und f' in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}'$, so folgt in der Tat nach 8. aus $\overline{P'P} : \overline{P'S} = \overline{P'G} : \overline{P'F'} = \overline{P'\mathfrak{G}} : \overline{P'\mathfrak{F}'}$, daß auch $P'\mathfrak{G} \parallel S\mathfrak{F}'$ ist; denn je nachdem S und P auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P' liegen, gilt dasselbe von G und F' einerseits und $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}'$ andrerseits. Es entspricht daher auch

1) Vgl. hierzu Hilbert, Grundlagen der Geometrie, S. 36.

jedem Punkte P eindeutig ein Punkt P' auf SP und umgekehrt. Zugleich sieht man, daß die zentrale Kollineation auch bestimmt ist durch das Zentrum S, die Achse e und das Bild P' irgendeines Punktes P auf SP.

Sind daher ABC und $A'B'C'$ irgend zwei Dreiecke, die in bezug auf das Zentrum S perspektiv liegen, so ist das zweite das Bild des ersten in der zentralen Kollineation mit dem Zentrum S der Achse $\alpha\beta$, wo $\alpha = (BC, B'C')$ und $\beta = (CA, C'A')$, und C, als dem Bilde von C. Deshalb muß auch der Punkt $\gamma = (AB, A'B')$ auf $\alpha\beta$ liegen, womit der Desarguessche Satz bewiesen ist. Der Beweis würde nur dann versagen, wenn α und β unendlich ferne Punkte wären, in welchem Falle der Satz aber unmittelbar aus 8. folgen würde. Auch der Fall, daß S selbst ins Unendliche rückt, also der Fall der affinen Dreiecke ist leicht zu erledigen. Denn ist $\mathfrak{a}$ der Schnittpunkt von $\alpha\gamma$ mit der Parallelen durch A zu BC, so folgt aus $\overline{\gamma\mathfrak{a}} : \gamma\alpha = \overline{\gamma A} : \gamma B = \overline{\gamma A'} : \gamma B'$, daß auch $A'\mathfrak{a} \parallel B'C'$ ist. Da der Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ der Parallelen durch A zu BC und durch A' zu $B'C'$ ebenso auf $\alpha\beta$ liegt, so liegen in der Tat α, β, γ in einer Geraden. Ist endlich auch noch $AB \parallel A'B'$, so führt dasselbe Verfahren dazu, daß auch $\alpha\beta \parallel AB$ ist.

Mit Hilfe der zentralen Kollineation ist es schließlich leicht, den allgemeinen Fall des Pascalschen Satzes für irgend zwei Geraden ABC und $A'B'C'$ auf den speziellen oben bewiesenen zurückzuführen. Setzen wir nämlich $(BC', CB') = \alpha$, $(CA', AC') = \beta$ und $(AB', BA') = \gamma$ und ist S der Fußpunkt der Senkrechten durch den Schnittpunkt von $\alpha\gamma$ mit AB zu irgend einer Geraden durch den Schnittpunkt von $\alpha\gamma$ mit $A'B'$, so erfüllt die Kollineation mit dem Zentrum S, der Fluchtlinie $\alpha\gamma$ und irgend einer Parallelen dazu als Achse die Forderung. Lägen α und γ im Unendlichen, so folgt der Satz leicht aus 3. oder, falls auch $AB \parallel A'B'$ ist, aus der Betrachtung von Parallelogrammen.

Nachdem so die beiden Fundamentalsätze bewiesen sind, kann alles Weitere wie in den §§ 4 und 5 entwickelt werden, wenn man nicht vorzieht, auf der Proportionslehre in bekannter Weise die analytische oder die projektive Geometrie der Ebene aufzubauen. Wir bemerken hierzu nur so viel, daß dann der pythagoräische Lehrsatz als ein Satz der Ähnlichkeitslehre und Streckenrechnung aufzufassen ist. Schneidet in der Tat die Senkrechte in C auf der Hypotenuse CB des rechtwinkeligen Dreiecks ABC die Kathete AB in D, so folgen daraus, daß $\Delta\, ABC \sim ACD \sim CBD$, die Propor-

tionen $AC : AB = AD : AC$ und $AB : BC = CB : BD$ und hieraus $BC^2 = AB \cdot BD = AB^2 + AB \cdot AD = AB^2 + AC^2$. Das Wesentliche dieses Aufbaues besteht darin, daß er die räumlichen Postulate sowie das Postulat von der Umkehrbarkeit der Strecke entbehren konnte, während bezüglich des 14. Postulats von den Schnittpunkten des Kreises mit einer den Mittelpunkt nicht enthaltenden Geraden keine Reduktion eintritt.

Von andern Parallelenaxiomen ist besonders dasjenige von Bolyai und Lobatscheffskij zu nennen, wonach es durch jeden Punkt A außerhalb einer Geraden b stets zwei Halbgerade a_1 und a_2 gibt, die nicht ein und dieselbe Gerade ausmachen und die b nicht schneiden, während jede in dem durch a_1 und a_2 gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die b schneidet (vgl. S. 100 und den dort angeführten Artikel von Hilbert). Wir gehen auf die Folgerungen, die sich aus einem solchen Axiome ergeben, nicht ein, weil die dadurch erzielten Vereinfachungen nicht im Verhältnisse stehen zu der Stärke der Voraussetzungen, die in ihnen liegen. Dann aber macht das Axiom einerseits das 13. Postulat von der Umkehrbarkeit der Strecke nicht entbehrlich und hat andrerseits das 14. Postulat zur Folge[1]).

Auch die letzte Form des Parallelenaxioms, wenn man so sagen will, wonach es in der Ebene überhaupt keine parallele, sondern nur sich schneidende Geraden gibt, soll hier nicht weiter verfolgt werden, zumal das hierbei einzuschlagende Verfahren sich nach gehörigen Vorbereitungen mit demjenigen deckt, welches auch ohne irgend eine Annahme über das Schneiden und Nichtschneiden der Geraden einer Ebene zum Ziele führt und im nächsten Paragraphen auseinandergesetzt werden soll.

---

1) Vgl. den Art. d. Verf. in Math. Ann. 59, S. 319, Zur Bolyai-Lobatscheffskijschen Geometrie.

§ 7.

Begründung der allgemeinen Geometrie der Ebene in dieser selbst.

No. 45. Ideale Punkte. Unsre bisherige Begründung der Geometrie benutzte zwar weder ein Parallelen- noch ein Stetigkeitsaxiom, beruhte aber ganz wesentlich auf räumlichen Betrachtungen. Besonders zum Beweise der grundlegenden Sätze, nämlich der Sätze des Desargues und des Pascal benutzten wir den Raum und ebenso zur Ableitung der uneigentlichen Elemente. Allerdings gelang es, die Theorie dieser uneigentlichen Elemente, die ja der projektiven Geometrie erst den Charakter der Allgemeinheit verleiht, aus rein projektiven Postulaten ohne Benutzung von Postulaten der Bewegung zu entwickeln. Verzichtet man auf diesen systematischen Vorteil, benutzt man vielmehr von vornherein auch die Postulate der Bewegung, so gelingt es nach dem Vorgange von Hjelmslev[1]) unter Beschränkung auf ebene Axiome die uneigentlichen Elemente einzuführen und auf dieser Grundlage die allgemeine Geometrie der Ebene ganz und gar in dieser selbst zu entwickeln. Es gelingt dies allerdings auf Kosten der Einfachheit, und wir weisen deshalb ausdrücklich darauf hin, daß das Verständnis dieses Paragraphen für den Schluß des Buches nicht nötig ist. Wir setzen also im folgenden ausschließlich die projektiven Postulate 1—6 und die Postulate der Bewegung 9—13 voraus, wobei auch das 11. Postulat nur für die eine Ebene in Betracht kommt. Das 13. Postulat von der Umkehrbarkeit der Strecke, dessen wir bei Benutzung des Raumes zum Beweise des Pascalschen Satzes, also zur Begründung der projektiven Geometrie nicht bedurften, und das dann eine Folge des 14. Postulats wurde, müssen wir hier freilich von vornherein zugrunde liegen.

---

1) Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, Math. Ann. Bd. 64, S. 449 ff. Unser Paragraph ist eine nur in der äußeren Form veränderte Wiedergabe dieser Abhandlung.

Im Mittelpunkte unsrer Betrachtungen steht die *Umwendung* $\mathfrak{U}_a$ um eine Achse a, die wie auf S. 29 definiert ist, als die Bewegung, die alle Punkte der Geraden a stehen läßt und jeden andern Punkt P in einen von P durch a getrennten Punkt P' verwandelt. Zwei Geraden heißen *senkrecht* auf einander, wenn die Umwendung um die eine die beiden Seiten der andern vertauscht, woraus dann wie auf S. 31 folgt, daß zwei auf einander senkrechte Geraden durch jede Bewegung in ebensolche übergeführt werden. Dagegen werden wir über die Umwendung als eine zentrale Kollineation noch nichts aussagen können.

Wir bemerken zuvor, daß auch unabhängig von dem Begriffe der uneigentlichen Punkte bewiesen werden kann, daß *jede Gerade a durch eine Umwendung in jede andre Gerade b übergeführt werden kann.* Ist nämlich A resp. B ein Punkt von a resp. b (Fig. 49), $BC \perp b$ und $AC \perp BC$, ferner m diejenige Umwendungsachse der beiden Geraden a und AC, deren Punkte von B durch a oder AC getrennt sind, so wird die Senkrechte MN von der Mitte M der Strecke $\overline{BC}$ auf m entweder einen Punkt von AC oder von a, also weil sie bei der Umwendung um m fest bleibt, auch einen Punkt von a oder von AC enthalten. Sind P und R diese beiden Punkte, so geht R bei der Umwendung um den Punkt M in einen Punkt Q von b über, und die Aufeinanderfolge der Umwendungen um m, M und Q führt P in Q über, die Halbgerade $(P)Q$ in $(Q)P$ und läßt die durch PQ begrenzte Halbebene stehen, ist also nach dem 13. Postulate diejenige Umwendung, welche die Strecke $\overline{PQ}$ umkehrt. Sie verwandelt aber auch a in b, ist also die gesuchte Umwendung[1]).

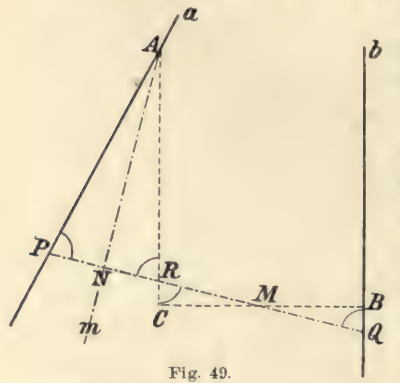


Fig. 49.

Sind nun a und b zwei verschiedene Geraden (Fig. 50) und A ein beliebiger Punkt, der nicht in beiden enthalten ist, so sind die beiden Punkte $B = \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b A$ und $C = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a A$ im allgemeinen von einander verschieden. Denn ist $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a$, so wird für einen Punkt A von b $B = \mathfrak{U}_a A$, also auch $B = C = \mathfrak{U}_b B$ sein, so daß

1) Auch diesen Beweis verdankt der Verf. einer brieflichen Mitteilung des Herrn Hjelmslev.

auch B der Achse b angehören muß. Dann ist $b \perp a$, in welchem Falle in der Tat (vgl. S. 30) stets $B = C$ ist. Ist aber B von C verschieden, so ist jedenfalls $\overline{AB} \simeq \overline{AC}$, weil die Bewegung $\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a$ die Strecke $\overline{AB}$ in $\overline{CA}$ verwandelt und nach dem 13. Postulate und dem aus ihm folgenden Satze 38 auf S. 43 durch eine weitere Umwendung $\overline{CA}$ in $\overline{AC}$ übergeführt wird. Haben die Geraden a und b einen Punkt O gemein, so bleibt dieser bei der Bewegung $\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a$ fest, so daß auch $\overline{OB} \simeq \overline{OA} \simeq \overline{OC}$ ist. Daher kann das Dreieck OAB durch eine Umwendung um OA in OAC übergeführt werden (vgl. S. 98), was natürlich auch in dem Grenzfalle bestehen bleibt, daß $a \perp b$ ist.

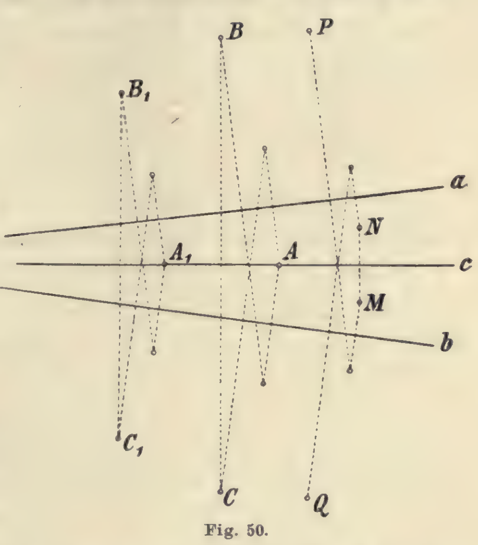


Fig. 50.

Wenn aber die Geraden a und b keinen (erreichbaren) Punkt gemein haben, so gibt es doch stets eine (und nur eine) Gerade c durch A, welche Umwendungsachse für B und C ist (nach dem 12. Postulate). Von dieser Geraden wollen wir sagen, daß sie *dem Geradenpaar* (ab) *angehört.* Nehmen wir auf der so gefundenen Geraden c einen neuen Punkt A_1 an, so gehen auch die Punkte $B_1 = \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b A_1$ und $C_1 = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a A_1$ durch die Umwendung $\mathfrak{U}_c$ ineinander über. Denn es ist erstens wie oben $\overline{A_1 B_1} \simeq \overline{A_1 C_1}$, zweitens $C_1 = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a A_1 = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c A_1 = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b B_1$ und drittens $A = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a B$ $= \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c C = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b A$, so daß auch $\overline{AB_1} \simeq \overline{AC_1}$ ist. Hiernach erhalten wir das Resultat:

89. Satz. *Sagt man von einer Geraden c, sie gehöre dem Geradenpaare (ab) an, wenn sie die Umwendungsachse für die beiden Punkte $B = \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b A$ und $C = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a A$ ist, wo A irgend ein Punkt von c ist, so ist sie zugleich Umwendungsachse für die beiden Punkte $B_1 = \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b A_1$ und $C = \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a A_1$, wo A_1 irgend ein andrer Punkt von c ist, d. h. die einem Geradenpaare angehörende Gerade ist durch irgend einen ihrer Punkte eindeutig bestimmt.*

Da man ebenso beweist, daß A_1 bei der Bewegung $\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b$ fest bleibt, so kann diese Bewegung nur die Umwendung $\mathfrak{U}_c$ sein. Daraus folgt, daß $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a$. Ist umgekehrt diese Bedingung

erfüllt, so gehört nach unserer Definition c dem Geradenpaare (ab) an, so daß wir den Satz erhalten:

90. Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Gerade c dem Geradenpaare (ab) angehört, ist die, daß* $\mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a$.

Da aus dieser Identität auch leicht die andere $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_c$ folgt, so ist sie in bezug auf a, b, c symmetrisch, so daß der Satz gilt:

91. Satz. *Wenn c dem Paare (ab) angehört, so werden auch a und b den Paaren (bc) und (ac) angehören.*

Weiter ergibt sich leicht:

92. Satz. *Wenn drei Geraden a, b, c eine gemeinsame Senkrechte n besitzen, so muß c dem Paare (ab) angehören.*

Wenn man nämlich nach unserer Definition durch den Schnittpunkt von c und n diejenige Gerade konstruiert, welche dem Paare (ab) angehört, so zeigt die Konstruktion, daß diese Gerade mit c zusammenfallen muß. Umgekehrt gilt:

93. Satz. *Wenn zwei Geraden a und b eine gemeinsame Senkrechte n haben, und wenn eine dritte Gerade c dem Paare (ab) angehört, so ist n auch zu o senkrecht.*

Fällt man in der Tat von einem Punkte A der Geraden c die Senkrechte c_1 auf n, so gehört nach dem vorigen Satze c_1 dem Paare (ab) an, kann also von c nicht verschieden sein. Im besonderen folgt:

94. Satz. *Wenn zwei Geraden* **zwei** *gemeinsame Senkrechte haben, so ist jede Senkrechte der einen Geraden auch eine Senkrechte der andern.*

Fällt man nämlich von irgend einem Punkte Senkrechte auf die beiden Geraden, so fallen diese Senkrechten nach dem 92. und dem 89. Satze zusammen. Da man durch Bewegung jede Gerade in jede andre überführen kann, so ergibt sich hieraus von neuem der Satz (vgl. den 2. Hilfssatz auf S. 104):

95. Satz. *Gibt cs irgend ein Viereck mit vier rechten Winkeln, so muß in jedem Vierecke mit drei rechten Winkeln auch der vierte Winkel ein rechter sein.*

Nunmehr beweisen wir endlich den Satz:

96. Satz. *Wenn die Geraden c und d dem Paare (ab) angehören, so muß auch d dem Paare (bc) angehören.*

Zum Beweise leiten wir aus einem beliebigen Punkte A der Geraden d die folgenden Punkte ab: $M = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b A$, $N = \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a A$, $P = \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c A$, $Q = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b A$, Dann folgt wie oben, daß M und N die

Umwendungsachse d haben. Weiter ist $M = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b P$ und $Q = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b N = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b N$ (90. Satz), also $\overline{MQ} \simeq \overline{PN} \simeq \overline{NP}$. Endlich ist $N = \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b P = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a P$ und $Q = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a M = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a M$, woraus folgt, daß auch $\overline{NQ} \simeq \overline{PM} \simeq \overline{MP}$ ist. Es ist daher $\Delta MNQ \simeq NMP$, d. h. die Umwendung $\mathfrak{U}_d$, welche M und N vertauscht, verwandelt auch Q in P, so daß in der Tat d dem Paare (bc) angehört. Hiernach können wir in Analogie des 14. Satzes auf S. 18 das folgende Resultat aussprechen:

97. Satz. *Je zwei Geraden bestimmen ein Büschel von Geraden derart, daß durch jeden eigentlichen Punkt eine Gerade des Büschels geht, die dem Geradenpaare angehört. Das Büschel ist durch je zwei seiner Geraden eindeutig bestimmt. Ist die Existenz eines eigentlichen Mittelpunktes des Büschels nicht verbürgt, so nennen wir ihn einen* ***idealen** oder **uneigentlichen** Punkt.*

Wir stellen uns auch hier auf den Standpunkt, daß unsere Konstruktionen auf einen gewissen Teil der Ebene beschränkt sind, und werden dabei im besonderen annehmen müssen, daß der absolute Pol einer Geraden, falls er ein eigentlicher Punkt sein sollte, nicht zugleich mit der Geraden dem betrachteten Teile der Ebene angehört, weil er sonst auf zwei verschiedenen Seiten der Geraden liegen würde.

Es ergibt sich weiter der Satz:

98. Satz. *Wenn eine Gerade a durch die Umwendung $\mathfrak{U}_c$ in b übergeht, so haben die drei Geraden a, b, c einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt gemein.*

Nimmt man in der Tat irgend einen Punkt A auf c an, so geht der Punkt $\mathfrak{U}_b A$ durch $\mathfrak{U}_c$ in $\mathfrak{U}_a A$ über und ebenso die Senkrechte von $\mathfrak{U}_b A$ auf a in die Senkrechte von $\mathfrak{U}_a A$ auf b, also auch $\mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b A$ in $\mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a A$ über, w. z. b. w.

No. 46. Satz von den drei Umwendungen und dessen Folgen. Wir beweisen nun denjenigen Satz (27. Satz auf S. 34), welcher wie in § 3 auch hier grundlegende Bedeutung hat:

99. Satz. *Wenn drei Geraden a, b, c einen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkt U gemein haben, so kann die Aufeinanderfolge der drei Umwendungen $\mathfrak{U}_a$, $\mathfrak{U}_b$, $\mathfrak{U}_c$ durch einzige Umwendung um eine Achse durch U ersetzt werden.*

Es wird genügen, hier den Fall zu betrachten, daß a, b, c sämtlich verschieden sind und ihr gemeinsamer Punkt ein idealer ist, da der andere Fall bereits in § 3 bewiesen wurde. Da die Bewegung $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c$ nach dem 90. Satze eine involutorische ist, so bedarf

es nur des Nachweises, daß wenigstens zwei Punkte existieren, die bei dieser Bewegung fest bleiben. Sind nun A und A_1 irgend zwei Punkt von c und B resp. B_1 die ihnen entsprechenden Punkte, so kehrt die Bewegung $\mathfrak{U}$ die Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{A_1B_1}$ um, so daß deren Mittelpunkte O und O_1 sicher fest bleiben. Es frägt sich also nur, ob sie voneinander verschieden sein müssen. Würden sie zusammenfallen, so wäre $\mathfrak{U}$ eine Umwendung um $O \equiv O_1$ und die Senkrechte von O auf AA_1 müßte, weil sie in ihre Verlängerung über O hinaus übergeht, auch auf BB_1 senkrecht sein, also nach dem 98. und 93. Satze eine gemeinsame Senkrechte der drei Geraden a, b, c sein. Dann erhielten wir aber den Widerspruch, daß einerseits A_1 und $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_c A_1$ auf derselben Seite dieser Senkrechten liegen müßten, weil U ein uneigentlicher Punkt sein soll, und andererseits, weil $\mathfrak{U}$ eine Umwendung um O wäre, auf verschiedenen Seiten. Es müssen daher O und O_1 voneinander verschieden sein, so daß $\mathfrak{U}$ in der Tat die Umwendung um die Achse OO_1 ist. Diese geht nach dem 98. Satze durch den gemeinsamen Punkt von AA_1 und BB_1, d. h. durch U, wie durch wiederholte Anwendung desselben Satzes folgt.

Aus diesem Satze folgt wie in § 3 der Satz:

100. Satz. *Zwei Umwendungen $\mathfrak{U}_a$ und $\mathfrak{U}_b$ können durch zwei andere Umwendungen derart ersetzt werden, daß die Achse der ersten oder der zweiten dieser Umwendungen in irgend eine gegebene Gerade c durch den gemeinsamen Punkt von a und b fällt.*

Die Identitäten $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_x$ und $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_x\mathfrak{U}_c$ sind in der Tat gleichbedeutend mit $\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_x$ und $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_c = \mathfrak{U}_x$.

Hieraus folgt weiter:

101. Satz. *Die Aufeinanderfolge $\mathfrak{V}$ von irgend vier Umwendungen $\mathfrak{U}_a$, $\mathfrak{U}_b$, $\mathfrak{U}_c$, $\mathfrak{U}_d$ kann durch zwei Umwendungen ersetzt werden.*

Fallen zwei aufeinanderfolgende Achsen zusammen, so ist der Satz selbstverständlich. In allen übrigen Fällen nehmen wir auf a einen eigentlichen Punkt A an, der nicht in b enthalten ist, und verbinden ihn mit (b, c) durch eine Gerade m. Dann kann n durch (b, c) so bestimmt werden, daß $\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_m\mathfrak{U}_n$, so daß $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_m\mathfrak{U}_n\mathfrak{U}_d$. Fällt n mit d zusammen, so ist der Beweis des Satzes geliefert. Sonst zieht man die Gerade p durch A und (n, d) und bestimmt die Achse q durch (n, d) so, daß $\mathfrak{U}_n\mathfrak{U}_d \equiv \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_q$ ist, also $\mathfrak{V} \equiv \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_m\mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_q$ wird. Da nun a, m, p alle durch A laufen, so ist in der Tat $\mathfrak{V} = \mathfrak{U}_r\mathfrak{U}_q$, wo r eine Achse durch A ist.

Durch eine ähnliche Betrachtung läßt sich leicht zeigen, daß drei Umwendungen, deren Achsen nicht alle durch einen und den-

selben Punkt gehen, durch drei Umwendungen derart ersetzt werden können, daß die beiden ersten der Umwendungsachsen durch irgend einen eigentlichen Punkt P gehen. Bei der durch die Aufeinanderfolge der drei Umwendungen entstehenden Bewegung kann der Punkt P nur dann sich selbst entsprechen, wenn er auf der dritten Achse liegt oder deren absoluter Pol ist. Schließen wir daher den Fall aus, daß der absolute Pol einer Geraden innerhalb des von uns betrachteten Teiles der Ebene liegt, so können wir die folgenden Sätze aussprechen:

102. Satz. *Drei Umwendungen können einander nicht aufheben. Bei der Aufeinanderfolge von drei Umwendungen, die nicht durch eine einzige Umwendung ersetzt werden können, wird kein eigentlicher Punkt sich selbst entsprechen.*

103. Satz. *Eine ungerade Anzahl von Umwendungen kann nicht durch eine gerade Anzahl von Umwendungen ersetzt werden.*

Zwei Figuren, die durch die Aufeinanderfolge einer *geraden* resp. *ungeraden* Anzahl von Umwendungen ineinander übergehen, nennen wir *kongruent* resp. *symmetrisch.* Die Aufeinanderfolge zweier Umwendungen heiße wie früher eine *Drehung.*

Weiter ergibt sich:

104. Satz. *Bei jeder Symmetrie $\mathfrak{W}$, welche keine Umwendung ist, gibt es eine und nur eine Gerade, die sich selbst entspricht.*

Wählen wir eine Strecke $\overline{AB}$ (Fig. 51), der bei der Symmetrie $\mathfrak{W}$ eine Strecke A_1B_1 entspricht, so wird, falls die Mittelpunkte M und N der Strecken $\overline{AA_1}$ und $\overline{BB_1}$ verschieden sind, MN diese Gerade sein. Gelangt nämlich bei der Umwendung um den Punkt M die Strecke $\overline{AB}$ nach $\overline{A_1B_2}$, so haben $\overline{A_1B_2}$ und $\overline{A_1B_1}$ eine Umwendungsachse a, die durch A_1 läuft und auf MN senkrecht steht; denn die Mittelsenkrechte der Seite $\overline{BB_1}$ des Dreiecks BB_1B_2 ist auch zur Verbindungslinie der Mitten der beiden anderen Seiten senkrecht (vgl. die Figuren 36 und 37). Die Symmetrie $\mathfrak{W}$ kann also durch die Umwendung um M (Aufeinanderfolge zweier eigentlicher Umwendungen) und die Umwendung um a ersetzt werden, so daß in der Tat MN bei der Symmetrie fest bleibt. Es kann aber auch keine andere Gerade g bei $\mathfrak{W}$ unveränderlich sein, nämlich sicher keine solche, welche MN in einem

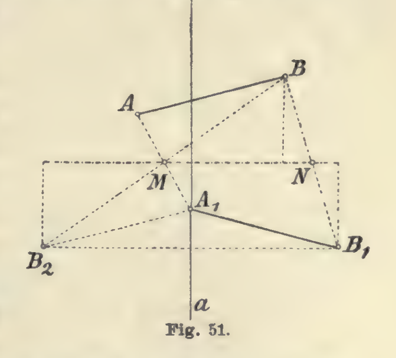


Fig. 51.

eigentlichen Punkte trifft, weil dieser sonst fest bleiben würde, aber auch keine die ganz auf einer Seite von M liegt. Denn jede solche Gerade gelangt bei der Umwendung um M auf die andere Seite von MN, und diese bleibt bei der Umwendung um a auf derselben Seite von MN.

Was aber den anderen Fall betrifft, daß M mit N zusammenfällt, so entsteht dann $\mathfrak{W}$ durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um $M \equiv N$ und die Umwendung um $A_1 B_1$, so daß die Senkrechte durch M auf $A_1 B_1$, die zugleich auf AB senkrecht steht, bei $\mathfrak{W}$ fest bleibt; von dieser Geraden beweist man wie eben, daß sie die einzige ist, die bei $\mathfrak{W}$ unveränderlich ist. Gleichzeitig ergibt sich aus unserer Figur der Satz:

105. Satz. *Die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken zweier kongruenter Punktreihen fallen entweder in einen Punkt zusammen oder liegen in einer Geraden.*

Wir beweisen weiter den folgenden Satz:

106. Satz. *Wenn vier Geraden a, b, c, d einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt O gemein haben und es ist $(a, b) \cong (c, d)$, d. h. es geht durch die Aufeinanderfvlge zweier Umwendungen oder eine Drehung das Geradepaar (a, b) in (c, d) über, so ist $\mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d$, und umgekehrt.*

Ist m eine Umwendungsachse des Paares (a, c) (vgl. auch Fig. 49), so muß der Voraussetzung gemäß das Paar (a, b) durch die Drehung $\mathfrak{D} = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m$ in (c, d) übergehen. Ist ferner A irgend ein Punkt und setzen wir $B = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b A$, $A_1 = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m A$, $B_1 = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d A_1$, so führt $\mathfrak{D}$ die Elemente A, a, b in A_1, c, d, also auch $B = \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b A$ in $B_1 = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d A_1$ über. Es ist also auch $B_1 = \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m B$ oder: $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m \equiv \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b$. Hieraus folgt auf Grund des 90. Satzes: $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m \equiv \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_m \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_m$, also in der Tat: $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_d \equiv \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b$. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt und $(a, b) \cong (c, d)$, so ist hiernach $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_{d_1} \equiv \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b$, also $d \equiv d_1$.

Nunmehr können wir den folgenden fundamentalen Satz beweisen:

107. Satz. *Wenn in den Endpunkten der Strecken $\overline{OA}$ und OB Senkrechte errichtet werden, die den eigentlichen oder uneigentlichen Punkt P gemein haben, und von O auf AB die Senkrechte OQ gezogen wird, so gilt stets die Kongruenz $(OA, OQ) \cong (OP, OB)$ (Fig. 52).*

In dem Falle, daß B mit P, also auch A mit Q zusammenfällt, ist der Satz selbstverständlich. Sehen wir hiervon ab und bezeichnen die Geraden der Figur gemäß, so laufen die Geraden a, c, d

nicht durch denselben Punkt, so daß die Aufeinanderfolge der drei Umwendungen $\mathfrak{U}_a$, $\mathfrak{U}_c$, $\mathfrak{U}_d$ nicht durch eine einzige ersetzt werden kann (vgl. 90. Satz). Es gibt also nach dem 104. Satze eine und nur eine Gerade g, die bei der Symmetrie $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a$ sich selbst entspricht. Diese Gerade geht erstens durch B; denn bestimmen wir e nach dem 100. Satze so, daß $\mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a \equiv \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_e$, so ist $\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_e$, es muß also, da $\mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_b$ eine Umwendung um B ist, bei der Symmetrie $\mathfrak{S}$ die Senkrechte durch B auf e fest bleiben. Ebenso zeigt man, daß, wenn p durch die Identität $\mathfrak{U}_d \mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_p \mathfrak{U}_h$ bestimmt wird, g mit der Senkrechten durch A auf p zusammenfällt. Demnach ist $g = AB$, $p = OQ$ und nach dem vorigen Satze $(d, c) \simeq (p, h)$, w. z. b. w.

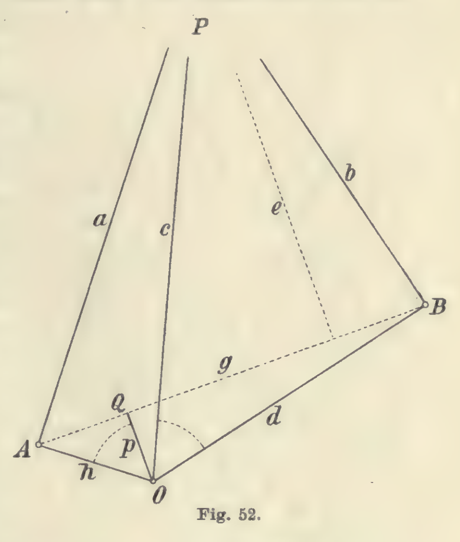


Fig. 52.

No. 47. Halbdrehung. Um auch zu dem Begriffe der *uneigentlichen oder idealen Geraden* zu gelangen, stellen wir zunächst die folgende Definition auf:

25. Definition. *Unter einer **Halbdrehung** $\mathfrak{H}$ um einen **Fundamentalpunkt** O verstehen wir diejenige Verwandtschaft, welche aus der Drehung $\mathfrak{D}$ um O dadurch entsteht, daß jedem Punkte A der Mittelpunkt A_1 der Strecke von A nach dem Punkte $\mathfrak{D}A$ zugeordnet wird; die Umkehrung dieser Verwandtschaft soll eine **inverse** Halbdrehung $\mathfrak{J}$ heißen.*

Die Beziehung zwischen den beiden Figuren $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$ ist offenbar umgekehrt eindeutig, weil $OA_1 \perp OA$, $OB_1 \perp OB$ usw., und $(OA, OA_1) \simeq (OB, OB_1) \simeq (OC, OC_1)$ usw. Der Fundamentalpunkt O entspricht sich selbst, und jeder Geraden durch O entspricht eine Gerade durch O. Die Halbdrehung oder ihre Umkehrung ist bestimmt durch den Fundamentalpunkt und zwei einander entsprechende Geraden durch O.

Bei einer Halbdrehung $\mathfrak{H}$ gehen nach dem 105. Satze die eigentlichen Punkte irgend einer Geraden a in eigentliche Punkte einer Geraden a_1 über, die den Fußpunkt A der Senkrechten von O auf a mit $A_1 = \mathfrak{H}A$ verbindet (Fig. 53). Sind nämlich B und C zwei solche Punkte auf a, daß A die Mitte von BC ist, und gehen bei

derjenigen Drehung $\mathfrak{D}$, aus welcher $\mathfrak{H}$ entstanden ist, A, B, C in A_2, B_2, C_2 über, so gehen A, B, C durch die Umwendung um OA_1 in A_2, C_2, B_2 über, weil $\mathfrak{D}$ durch die Aufeinanderfolge der Umwendungen um OA und OA_1 entsteht. Daher geht durch die Umwendung um OA_1 auch die Mitte von $\overline{BB_2}$ in die Mitte von $\overline{C_2C}$ über, die Verbindungslinie dieser Mitten steht daher auf OA_1 senkrecht und ist in der Tat die Gerade a_1.

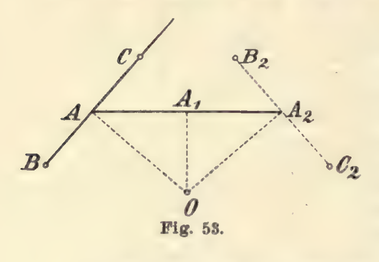


Fig. 53.

Es ergibt sich zugleich, daß einem rechten Winkel, von dem ein Schenkel durch O geht, wieder ein rechter Winkel entspricht. Daraus wiederum folgt, daß den Geraden a, b, c durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt P die Geraden a_1, b_1, c_1 entsprechen, die ebenfalls einen Punkt P_1 gemein haben. Behalten wir nämlich die Bezeichnung von Fig. 47 bei und gehen A, B, Q bei der Halbdrehung in A_1, B_1, Q_1 über, so ist hiernach auch $OA_1 \perp a_1$, $OB \perp b_1$ und $OQ_1 \perp A_1B_1$. Da ferner entsprechende Winkel mit dem Scheitel O einander kongruent sind, so folgt aus $(OA, OQ) \cong (c, OB)$ auch $(OA_1, OQ_1) \cong (c_1, OB_1)$, so daß nach dem 107. Satze auch c_1 durch $P_1 = (a_1, b_1)$ gehen muß.

Alles in allem können wir das Resultat aussprechen:

108. Satz. *Eine Halbdrehung und deren Umkehrung ist eindeutig bestimmt durch den Fundamentalpunkt O und das Bild resp. Original einer Geraden durch ihn. Bei der Halbdrehung entspricht jedem eigentlichen Punkte wieder ein solcher, jeder Geraden die Gerade durch den Fußpunkt der Senkrechten von O auf sie, den Geraden durch einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt Geraden, die ebenfalls einen Punkt gemein haben, und jedem rechten Winkel mit einem Schenkel durch O wieder ein rechter Winkel.*

Durch eine inverse Halbdrehung $\mathfrak{J}$ braucht offenbar ein eigentlicher Punkt A_1 nicht wieder in einen solchen überzugehen, weil die Senkrechte in A_1 auf OA_1 den OA_1 entsprechenden Strahl OA nicht wirklich zu schneiden braucht. Da es aber beliebig viel eigentliche Punkte gibt, denen durch $\mathfrak{J}$ ebensolche zugeordnet sind, so gibt es auch durch jeden eigentlichen oder uneigentlichen Punkt P_1 beliebig viel Geraden a_1, b_1, c_1, denen wieder Geraden a, b, c entsprechen, so daß nach dem Obigen *jedem* Punkte P_1 durch $\mathfrak{J}$ wieder ein Punkt P zugeordnet ist, und wir können jedenfalls den Satz aussprechen:

109. Satz. *Wenn bei irgend einer (direkten oder inversen) Halbdrehung zwei Punkte A und B in A_1 und B_1 übergehen, und wenn die beiden Geraden AB und A_1B_1 existieren, so wird bei dieser Halbdrehung jedem Punkte der Geraden AB ein Punkt der Geraden A_1B_1 entsprechen.*

Wir betrachten weiter eine Transformation, die durch die Aufeinanderfolge einer Halbdrehung $\mathfrak{H}$ und einer inversen $\mathfrak{J}'$ entsteht. Aus Fig. 47 kann man dann sehen, daß, wenn der eigentliche Punkt A durch $\mathfrak{J}'\mathfrak{H}$ in den eigentlichen Punkt B übergeht, A auch durch $\mathfrak{H}\mathfrak{J}'$ in B verwandelt wird. Denn setzen wir $\mathfrak{H}A = Q$, so daß $\mathfrak{J}'Q = B$ wird, so ist nach dem 106. Satze $\mathfrak{J}'A = P$ und $\mathfrak{H}P = B$. Daraus folgt, daß, falls $\mathfrak{J}'a$ eine eigentliche Gerade ist, d. h. die Senkrechte in dem eigentlichen Punkte P auf c, auch $\mathfrak{J}'\mathfrak{H}a \equiv \mathfrak{H}\mathfrak{J}'a = b$ ist. Sobald also $\mathfrak{J}'$ gewisse eigentliche Punkte oder Geraden in ebensolche überführt, sind $\mathfrak{J}'$ und $\mathfrak{H}$ in bezug auf diese Punkte und Geraden vertauschbar. Daraus können wir dasselbe für alle Punkte beweisen. Ist nämlich U ein beliebiger Punkt und $V = \mathfrak{J}'U$, $W = \mathfrak{H}V$, so wählen wir zwei eigentliche Punkte P und P_1 so, daß PP_1 nicht durch V geht, und setzen: $\mathfrak{J}'A = P$, $\mathfrak{H}P = B$, $\mathfrak{J}'A_1 = P_1$, $\mathfrak{H}P_1 = B_1$, so daß A, B, A_1, B_1 sämtlich eigentliche Punkte sind, so liegen je auf einer wirklichen Geraden die Punktepaare A, U; A_1, U; P, V; P_1, V; B, W; B_1, W. Da nun $\mathfrak{H}\mathfrak{J}'(AU) = BW$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{J}'(A_1U) = B_1W$ ist, so ist auch $\mathfrak{J}'\mathfrak{H}(AU) = BW$ und $\mathfrak{J}'\mathfrak{H}(A_1U) = B_1W$, also nach dem 108. Satze auch $\mathfrak{H}\mathfrak{J}'U \equiv \mathfrak{J}'\mathfrak{H}U \equiv W$.

Hieraus ergibt sich der folgende allgemeinere Satz:

110. Satz. *Gehen bei der Aufeinanderfolge von beliebig viel Halbdrehungen oder Umkehrungen von solchen um denselben Fundamentalpunkt die eigentlichen oder uneigentlichen Punkte A, B, C in A_1, B_1, C_1 über, und es gehören sowohl A und B einer Geraden g als A_1 und B_1 einer Geraden g_1 an, so liegt, sobald C der Geraden g angehört, auch C_1 auf der Geraden g_1.*

Der Satz gilt nach dem Obigen zunächst für *eine* Halbdrehung oder deren Umkehrung. Da ferner bei einer direkten Halbdrehung einer Geraden immer wieder eine Gerade entspricht, so gilt der Satz auch bei der Aufeinanderfolge von beliebig viel Halbdrehungen. Handelt es sich aber um die Aufeinanderfolge der inversen Halbdrehungen $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_n$, die Umkehrungen der Halbdrehungen $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ sein mögen, so folgt aus $g_1 = \mathfrak{J}_n\mathfrak{J}_{n-1}\ldots\mathfrak{J}_1 g$, daß $g = \mathfrak{H}_1\mathfrak{H}_2\ldots\mathfrak{H}_n g_1$ ist, so daß der Satz auch in diesem Falle richtig ist. Setzen wir nämlich $A = \mathfrak{H}_1 A_n$, $A_n = \mathfrak{H}_2 A_{n-1}, \ldots, A_2 = \mathfrak{H}_n A_1$,

usw., so folgt, daß C_n der Geraden g_n, also auch C_{n-1} der Geraden $g_{n-1}, \dots$, also schließlich C_1 der Geraden g_1 angehört; denn aus $g_2 = \mathfrak{H}_n g_1, \dots, g_n = \mathfrak{H}_2 g_{n-1}$ folgt, daß alle diese Geraden existieren. Handelt es sich aber schließlich um die Aufeinanderfolge von Transformationen, die teilweise Halbdrehungen und teilweise deren Umkehrungen sind, so lassen sich diese wegen der oben bewiesenen Vertauschbarkeit so ordnen, daß alle vorkommenden direkten Halbdrehungen zuerst ausgeführt werden, so daß das Behauptete aus dem ersten Teile unserer Betrachtungen folgt.

No. 48. Uneigentliche Geraden. Die absoluten Pole aller Geraden durch einen Punkt. Nunmehr können wir dazu übergehen, den Begriff der *uneigentlichen Geraden* einzuführen. Da bei der inversen Halbdrehung, wie wir gesehen haben, nicht jeder eigentliche Punkt wieder in einen solchen übergeht, so wird auch nicht jeder Geraden wieder eine Gerade entsprechen. Aber wir können sehr wohl das der Geraden entsprechende Gebilde als uneigentliche Gerade einführen auf Grund der folgenden Definition:

26. Definition. *Eine* ***uneigentliche*** *oder* ***ideale*** *Gerade ist die Gesamtheit von uneigentlichen oder idealen Punkten, die entweder durch eine Halbdrehung um den Fundamentalpunkt in die Gesamtheit der eigentlichen oder uneigentlichen Punkte einer gewöhnlichen Geraden übergeht, oder aus den absoluten Polen der Geraden durch den Fundamentalpunkt besteht und dann* ***Fundamentalgerade*** *genannt wird.*

Wir gehen zuerst an die Rechtfertigung des hierdurch definierten Begriffs und können erst später beweisen, daß er von der Wahl des Fundamentalpunktes unabhängig ist. Wir beweisen zuerst den Satz:

111. Satz. *Wenn die Punkte U, V, W auf einer uneigentlichen Geraden liegen, so werden sie durch eine direkte oder inverse Halbdrehung $\mathfrak{K}$ um den Fundamentalpunkt in drei Punkte U_1, V_1, W_1 verwandelt, die auf einer eigentlichen oder uneigentlichen Geraden liegen.*

Liegen die Punkte auf der Fundamentalgeraden, so ist der Satz klar. Im anderen Falle gibt es eine Halbdrehung $\mathfrak{H}$, durch die U, V, W in die Punkte U', V', W' einer eigentlichen Geraden übergehen. Ferner können wir eine solche Halbdrehung $\mathfrak{H}_1$ finden, daß etwa U_1 in einen eigentlichen Punkt U_2 übergeht. Denn ist U_1 durch die Geraden OU_1 und u_1 bestimmt, so ist U_2 der Fußpunkt der Senkrechten von O auf u_1. Gehen durch $\mathfrak{H}_1$ die Punkte V_1 und W_1 in V_2 und W_2 über, so haben wir:

$$U_2 V_2 W_2 = \mathfrak{H}_1(U_1 V_1 W) = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{K}(UVW) = \mathfrak{H}_1 \mathfrak{K} \mathfrak{J}(U'V'W'),$$

wo $\mathfrak{J}$ die Umkehrung von $\mathfrak{H}$ ist. Da nun U', V', W' auf einer eigentlichen Geraden liegen und U_2 ein eigentlicher Punkt ist, so müssen nach dem 110. Satze auch die Punkte U_2, V_2, W_2 auf einer eigentlichen Geraden liegen, w. z. b. w.

Nach Einführung der idealen Geraden haben die folgenden Verknüpfungsgesetze allgemeine Gültigkeit, nämlich zuerst:

112. Satz. *Zwei Geraden a und b haben einen und nur einen Punkt gemein.*

Ist etwa a die Fundmentalgerade, so gibt es eine Halbdrehung, die b in eine eigentliche Gerade b_1 verwandelt. Bei dieser Halbdrehung bleibt a fest, und da a und b_1 einen und nur einen Punkt gemein haben, so gilt dasselbe von a und b. Fällt keine der beiden Geraden mit der Fundamentalgeraden zusammen, so gehen sie bei der Aufeinanderfolge zweier geeigneter Halbdrehungen in eigentliche Geraden über, und da diese Geraden einen und nur einen Punkt gemein haben, so ist der Beweis erbracht.

Wenn also zwei Punkte A und B überhaupt eine Gerade bestimmen, so ist diese eindeutig bestimmt. Liegen A und B auf der Fundamentalgeraden, so fällt AB offenbar in diese. Liegt aber A nicht auf der Fundamentalgeraden, so gibt es eine Halbdrehung, die A in einen eigentlichen Punkt A_1 verwandelt. Geht hierbei B in B_1 über, so haben A_1 und B_1 eine eigentliche Verbindungsgerade, die durch die Umkehrung der Halbdrehung in die eigentliche oder uneigentliche Gerade AB übergeht. Es gilt also zweitens der Satz:

113. Satz. *Irgend zwei Punkte A und B bestimmen eine und nur eine Gerade.*

Für die Folge brauchen wir endlich noch den folgenden Satz:

114. Satz. *Die absoluten Pole aller Geraden durch einen festen eigentlichen Punkt gehören einer Geraden, der absoluten Polare von P, an.*

Fällt P in den Fundamentalpunkt O, so ist der Satz eine unmittelbare Folge unserer Definition. Fällt P nicht nach O und ist b die Senkrechte durch P auf $a = OP$, so wird es genügen zu beweisen, daß die absoluten Pole von a, b und irgend einer Geraden c durch P in einer Geraden liegen. Zum Beweise ziehen wir d durch $P \perp c$, ferner $OC \perp c$, $OD \perp d$, $DB \perp b$ und $OA \perp BD$ (Fig. 54). Wäre dann auch $OA \perp a$, so hätten die Geraden a und BD zwei gemeinsame Senkrechte b und OA. Dann haben nach dem 94. Satze je zwei Geraden, die auf derselben Geraden senkrecht stehen, unendlich viele gemeinsame Senkrechte, so daß der absolute Pol jeder Geraden c durch P in denjenigen der Geraden OD fällt,

also in die Fundamentalgerade. Sehen wir also von diesem Falle ab, so trifft die Senkrechte PP_1 von P auf OA diese Gerade in einem von O verschiedenen Punkte P_1. Dann verwandelt diejenige Halbdrehung $\mathfrak{H}$ um O, welche P in P_1 überführt, a in OA und BA in eine durch A gehende Gerade, weil jede Senkrechte zu OP_1 in eine Gerade durch ihren Fußpunkt übergehen muß (109. Satz). Der absolute Pol von b geht daher als gemeinsamer Punkt von a und BA durch $\mathfrak{H}$ in A über. Da ferner der absolute Pol von a in denjenigen von OA übergehen muß, so ist nur zu beweisen, daß der absolute Pol von c in einem Punkt von AB verwandelt wird. Hierzu ziehen wir PQ und $OR \perp CD$. Dann ist nach dem 107. Satze

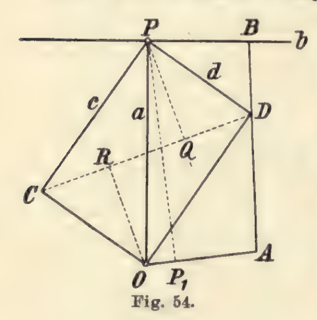


Fig. 54.

$$(PQ, d) \simeq (c, a) \simeq (d, b).$$

(Denn bei der Drehung, die c in a überführt, geht d in b über, oder es ist $\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_d \equiv \mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_b$ oder $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_d \equiv \mathfrak{U}_b$ oder $\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_d$, vgl. 106. Satz.) Es ist also $\triangle\, PQD \equiv \mathfrak{U}_d(PBD)$, und daher sind d und OD Umwendungsachsen des Paares BA und CD. Deshalb sind auch die Dreiecke ORD und OAD symmetrisch, also $(OA, OD) \simeq (OD, OA) \simeq (OD, OR) \simeq (OP, PC)$. Hieraus folgt $\mathfrak{U}_{OA}\mathfrak{U}_{OD} \equiv \mathfrak{U}_{OP}\mathfrak{U}_{OC}$ und daraus $\mathfrak{U}_{OP}\mathfrak{U}_{OA} \equiv \mathfrak{U}_{OC}\mathfrak{U}_{OD}$, folglich auch $(OP, OA) \simeq (OC, OD)$. Deshalb muß OC durch $\mathfrak{H}$ in OD übergehen. Da endlich d in eine Gerade durch D übergeht, so geht der absolute Pol von c in D über, womit unser Beweis erbracht ist.

No. 49. Satz des Pascal. Um unsere Definition der idealen Geraden von dem willkürlich gewählten Fundamentalpunkte unabhängig zu machen und zugleich eine Grundlage für den weiteren Aufbau der Geometrie zu gewinnen, können wir nach unseren Vorbereitungen den *Pascalschen Satz* beweisen. Nach Hessenberg[1]) können wir nämlich den folgenden besonderen Fall dieses Satzes beweisen:

115. Satz. *Wenn die Ecken eines Sechsecks sämtlich eigentliche Punkte sind und abwechselnd auf zwei Geraden liegen, und wenn ferner die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare eigentliche Punkte sind, dann liegen diese drei Punkte auf einer Geraden.*

Der Beweis von Hessenberg stützt sich im wesentlichen auf den folgenden Hilfssatz:

---

1) Hessenberg, Neue Begründung der Sphärik, Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 1905, S. 70 (Archiv der Math. u. Phys., Bd. 9).

Hilfssatz. *Sind A, A_1; B, B_1; C, C_1 die eigentlichen oder uneigentlichen Gegeneckenpaare des vollständigen Vierseits $pqrs$* (Fig. 55) *und a, a_1; b, b_1; c, c_1 deren Verbindungslinien mit einem solchen nicht in eine Ecke des Vierseits fallenden eigentlichen Punkte P, daß zwei dieser Geradenpaare gemeinsame Umwendungsachsen besitzen, so gehören diese auch dem dritten Geradenpaare zu.*

Zum Beweise des Hilfssatzes bestimmen wir die Geraden a', a_1'; b', b_1'; c', c_1' so, daß:

$$(1)\quad \mathfrak{U}_r\mathfrak{U}_a \equiv \mathfrak{U}_{a'}\mathfrak{U}_s, \qquad (2)\quad \mathfrak{U}_s\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_{b'}\mathfrak{U}_p, \qquad (3)\quad \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_{c'}\mathfrak{U}_r,$$

$$(4)\quad \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_{a_1} \equiv \mathfrak{U}_{a_1'}\mathfrak{U}_q, \qquad (5)\quad \mathfrak{U}_q\mathfrak{U}_{b_1} \equiv \mathfrak{U}_{b_1'}\mathfrak{U}_r, \qquad (6)\quad \mathfrak{U}_q\mathfrak{U}_{c_1} \equiv \mathfrak{U}_{c_1'}\mathfrak{U}_s.$$

Aus den Identitäten (3), (4), (5) folgert man unter Benutzung des 90. Satzes:

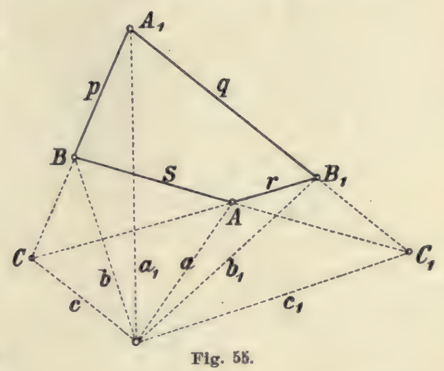


Fig. 55.

$$(7)\qquad \mathfrak{U}_{a_1'}\mathfrak{U}_{b_1'}\mathfrak{U}_{c_1'} \equiv \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_{a_1}\mathfrak{U}_{b_1}\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_p$$

und aus (4), (5), (2):

$$(8)\qquad \mathfrak{U}_{a_1'}\mathfrak{U}_{c_1'}\mathfrak{U}_{b'} \equiv \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_{a_1}\mathfrak{U}_{c_1}\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_p,$$

endlich aus (2), (1), (3):

$$(9)\qquad \mathfrak{U}_{b'}\mathfrak{U}_{a'}\mathfrak{U}_{c'} \equiv \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_a\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_p,$$

immer unter Berücksichtigung des 90. Satzes. Da nun die rechten Seiten dieser Identitäten je eine Umwendung darstellen, so gehen nach demselben Satze je durch einen Punkt die Geradentripel a_1', b_1', c'; a_1', c_1', b'; b', a', c'.

Da nun nach Voraussetzung $(c, b_1) \cong (b, c_1)$ oder $\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_{b_1}\mathfrak{U}_{c_1}$ oder $\mathfrak{U}_{b_1}\mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_{c_1}\mathfrak{U}_b$ ist, so ist:

$$(10)\qquad \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_{a_1}\mathfrak{U}_{b_1}\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_p \equiv \mathfrak{U}_p\mathfrak{U}_{a_1}\mathfrak{U}_{c_1}\mathfrak{U}_b\mathfrak{U}_p,$$

und daher nach (7) und (8):

$$(11)\qquad \mathfrak{U}_{a_1'}\mathfrak{U}_{b_1'}\mathfrak{U}_{c'} \equiv \mathfrak{U}_{a_1'}\mathfrak{U}_{c_1'}\mathfrak{U}_{b'}.$$

Hierzu bemerken wir zuvörderst, daß b' weder mit c' noch mit c_1' zusammenfallen darf. Im ersten Falle würde nämlich b' mit p, also c mit r zusammenfallen und im zweiten Falle b' mit s, also b mit p. Beides ist aber ausgeschlossen, weil sonst wegen der besonderen Annahme über P dieser Punkt entweder nach A oder nach A_1 fallen würde. Hieraus geht hervor, daß die Achse der durch

(11) dargestellten Umwendung $\mathfrak{U}$ nicht mit a_1' zusammenfallen darf, daß folglich b', c', b_1', c_1' durch den Schnittpunkt P' dieser Achse mit a_1' laufen muß, und daß demnach endlich auch a' durch diesen Punkt geht.

Wegen der Form der rechten Seite der Identität (8) gehört aber auch der Punkt $P_1 = \mathfrak{U}_p P$ der Achse der Umwendung $\mathfrak{U}$ an, und zwar ist dieser Punkt von P' verschieden. Denn sonst wäre z. B. $b' = \mathfrak{U}_p b$, weil b und b' durch B auf p laufen, also wegen (2) auch $\mathfrak{U}_s \mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_{b'} \mathfrak{U}_p \equiv \mathfrak{U}_p \mathfrak{U}_b$ $((b', p) \cong (p, b))$, so daß p mit s zusammenfallen müßte. Demnach ist $P'P_1$ die Achse der Umwendung $\mathfrak{U}$. Da nun infolge der Identität (9) dieselbe Gerade auch Achse der Umwendung $\mathfrak{U}_p \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_p$ ist, so sind diese beiden Umwendungen identisch oder es ist:

$$\mathfrak{U}_{a_1} \mathfrak{U}_{c_1} \mathfrak{U}_b \equiv \mathfrak{U}_b \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_c \equiv \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_a \mathfrak{U}_b$$

und deshalb auch $\mathfrak{U}_{a_1} \mathfrak{U}_{c_1} \equiv \mathfrak{U}_c \mathfrak{U}_b$, d. h. $(c, a) \cong (a_1, c_1)$, w. z. b. w.

Wir können jetzt den Beweis des 115. Satzes nach Hessenberg in folgender Weise führen. Das Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 56) habe seine Ecken abwechselnd auf den beiden Geraden g und h und P, Q, R seien die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten. Ist dann S der gemeinsame Punkt von g mit der Umwendung von PQ um die eine, also auch die andere Umwendungsachse des Geradenpaares PF und PC, und sind X, X_1 die gemeinsamen Punkte von FS mit CB und CD, so wenden wir den Hilfssatz auf P und die drei Vierseite an, die FS mit den Dreiseiten CQE, BCD und ACR bildet. Diese Vierseite haben der Reihe nach die Gegeneckenpaare:

Fig. 56.

$$X, E; \quad F, C; \quad Q, S,$$
$$X, D; \quad X_1, B; \quad F, C,$$
$$F, C; \quad X_1, A; \quad R, S.$$

Daraus ergibt sich, daß das Geradenpaar PX, PE dieselben Umwendungs-

achsen hat wie die Paare PF, PC und PQ, PS, daraus wiederum, weil $PD \equiv PE$, daß auch das Paar PX_1, PB dieselben Umwendungsachsen hat, und daraus endlich, weil $PA \equiv PB$ ist, daß diese Umwendungsachsen auch dem Paare PR, PS zugehören. Demnach sind PQ und PR beide dieselben Umwendungen von PS, fallen also zusammen, oder *P, Q, R liegen in einer Geraden.*

Nunmehr können wir den *allgemeinen Satz des Pascal* oder den 30. Satz auf S. 36 (bezogen allerdings auf den Fundamentalpunkt O der Halbdrehungen) folgendermaßen beweisen. Wieviel auch unter den 9 Punkten der Konfiguration, von denen vorausgesetzt wird, daß 8×3 auf 8 eigentlichen oder uneigentlichen Geraden liegen, uneigentliche sein mögen, so können wir doch nach dem 111. Satze aus dieser Figur durch die Aufeinanderfolge geeigneter direkter Halbdrehungen um O die Figur in eine solche verwandeln, daß unter ihren 9 Punkten jedenfalls keine anderen uneigentlichen vorhanden sind als solche, welche auf der Fundamentalgeraden liegen, ebenso wie eine uneigentliche unter den vorhandenen Geraden nur in die Fundamentalgerade fallen kann. Sehen wir nun von dem später besonders zu behandelnden Falle ab, daß die absoluten Polaren aller Punkte in eine ausgezeichnete Gerade fallen, die bei allen Bewegungen der Ebene fest bleibt (der Fall $\varkappa = 0$ nach unserer früheren Bezeichnung), so können wir die Figur einer Bewegung unterwerfen, bei der die Fundamentalgerade in die von ihr verschiedene absolute Polare eines andern Poles übergeht, also nach dem 114. Satze in eine uneigentliche Gerade. Diese Figur kann nun wiederum durch Halbdrehungen um O derart verwandelt werden, daß sie aus lauter eigentlichen Punkten und Geraden besteht, und da der Pascalsche Satz für eine solche Figur bewiesen wurde, so gilt er auch für die ursprüngliche Figur.

Hierdurch können wir zuerst zeigen, daß der Begriff der uneigentlichen Geraden vom Fundamentalpunkte unabhängig ist, oder den Satz beweisen:

116. Satz. *Drei Punkte P, Q, R, die in bezug auf irgend einen Fundamentalpunkt in einer uneigentlichen Geraden liegen, tun es auch in bezug auf jeden andern.*

Verbinden wir nämlich Q und R mit dem eigentlichen Punkte F durch Geraden und nehmen auf diesen eigentliche Punkte A und E an und auf AE den eigentlichen Punkt C, so liegen die eigentlichen oder uneigentlichen Punkte $B = (CQ, AP)$ und $D = (CR, EP)$ nach dem Pascalschen Satze mit F in einer Geraden, so daß P, Q, R die Schnittpunkte der eigentlichen Gegenseiten eines Sechsecks sind,

dessen Ecken abwechselnd auf zwei eigentlichen Geraden liegen; deshalb müssen P, Q, R auch in bezug auf jeden Fundamentalpunkt einer eigentlichen Geraden angehören. Der Beweis gilt auch für den ausgeschlossenen Fall, wenn P, Q, R nicht der ausgezeichneten Geraden angehören. Aber gerade in diesem Falle ist der Satz hier selbstverständlich.

No. 50. Zentrale Ähnlichkeit. Satz des Desargues. Was nun den ausgeschlossenen Fall betrifft, so können wir mit Hilfe der Halbdrehungen *eine zentrale Kollineation in bezug auf den Fundamentalpunkt O und die Fundamentalgerade* bilden. Verwandelt nämlich die Aufeinanderfolge von beliebig viel direkten oder inversen Halbdrehungen um O einen Punkt A in A_1 und verbinden wir hiermit diejenige Drehung, welche den Strahl OA_1 nach OA führt, so entspricht nicht nur dem Punkte A ein Punkt A' auf OA, sondern auch jedem Punkte B ein Punkt B' auf OB; denn es ist $(AO, BO) \cong (A_1 O, B_1 O) \cong (A' O, B' O)$. Da ferner sowohl bei jeder Halbdrehung als bei jeder Drehung um O jedem rechten Winkel mit einem Schenkel durch O ein ebensolcher entspricht, so besitzen die entsprechenden Geraden AB und $A'B'$ eine gemeinsame Senkrechte durch O oder schneiden sich auf der Fundamentalgeraden. Nennen wir daher eine solche Verwandtschaft eine *zentrale Ähnlichkeit in bezug auf den Fundamentalpunkt* und *parallel* ($\|$) zwei Geraden, die einen und denselben Punkt der Fundamentalgeraden enthalten, so ist klar, daß, falls es überhaupt eine solche Ähnlichkeit gibt, welche A in irgend einen Punkt A' auf OA verwandelt, der jedem Punkte B entsprechende B' dadurch eindeutig bestimmt ist, daß $A'B' \| AB$ sein muß. Eine solche Ähnlichkeit läßt sich aber in dem Falle, daß wenigstens A ein eigentlicher Punkt ist, dadurch herstellen, daß man OA zuerst nach OA_1 dreht, dann A durch eine Halbdrehung in den Fußpunkt A_2 der Senkrechten von O auf A_2A' überführt und endlich A_2 durch eine inverse Halbdrehung in A'. Auf diesen Fall kann derjenige, daß A und A' uneigentliche Punkte sind, dadurch zurückgeführt werden, daß man einem eigentlichen Punkte B den gemeinsamen Punkt B' von OB mit der Parallelen durch A' zu AB entsprechen läßt.

Da nun jedenfalls zwei Drehungen, eine Drehung und eine direkte oder inverse Halbdrehung und auch, wie wir auf S. 151 gesehen haben, eine direkte und eine inverse Halbdrehung vertauschbar sind, so wäre auch nachgewiesen, daß *zwei zentrale Ähnlichkeiten in*

bezug auf denselben Fundamentalpunkt vertauschbar sind, wenn auch die Vertauschbarkeit zweier direkter oder zweier inverser Halbdrehungen nachgewiesen wäre. Diese folgt aber, wie die Fig. 52 (Fig. 52a) in anderer Form lehrt, unmittelbar aus dem 107. Satze, wenn die erste Halbdrehung P in A und die zweite A in Q überführt; dann verwandelt in der Tat die zweite P in B und die erste B in Q. Wenden wir dies auf die beiden zentralen Ähnlichkeiten an, die A in A' und A' in A'' verwandeln, so ist einerseits $AB \parallel A''B'$ und andererseits, falls B_1 das Bild von B in der zweiten Ähnlichkeit ist $A'B \parallel A''B_1$,

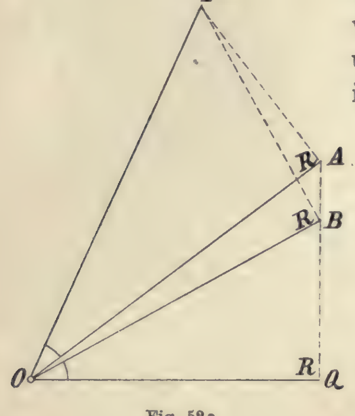


Fig. 52a.

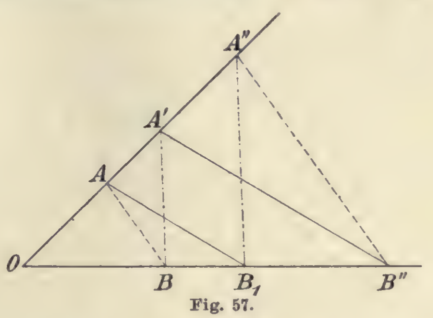


Fig. 57.

endlich aber wegen der Vertauschbarkeit auch $AB_1 \parallel A'B''$ (Fig. 57). Hiermit ist der *Pascalsche Satz* auch für den ausgeschlossenen Fall bewiesen, daß eine der Geraden der Konfiguration in die Fundamentalgerade fällt und zugleich die absolute Polare aller Punkte ist.[1])

Der Nachweis der Existenz einer zentralen Ähnlichkeit in bezug auf einen Fundamentalpunkt O und für irgendein Paar entsprechender Punkte liefert zugleich einen Beweis des *Desarguesschen Satzes von den perspektiven Dreiecken* (17. Satz auf S. 19) für den besonderen Fall, daß Zentrum und Achse Pol und seine absolute Polare sind. Im allgemeinen ergibt sich der Satz nach Hessenberg[2]) aus dem Satze des Pascal folgendermaßen. Sind ABC und $A'B'C'$ die beiden Dreiecke, O der Schnittpunkt von AA', BB', CC' und $\alpha = (BC, B'C')$, $\beta = (CA, C'A')$, $\gamma = (AB, A'B')$ die Schnittpunkte entsprechender

1) Hjelmslev erledigt diesen Fall auf S. 460 a. a. O. dadurch, daß er den Beweis, den Hilbert auf S. 28 der Grundlagen der Geometrie gegeben hat, eben auf den 107. Satz stützt. Der obige Beweis, den ich zum Teil einer brieflichen Mitteilung von Hjelmslev verdanke, dürfte durchsichtiger sein.

2) Hessenberg, Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen, Math. Ann. Bd. 61, S. 161.

Seiten, so können wir die Bezeichnung so einrichten, daß sich AC' und OB in einem von B und B' verschiedenen Punkte B'' schneiden. Denn sonst müßte das eine Dreieck dem andern gleichzeitig ein- und umschrieben sein, es müßte also z. B. A' auf BC, B' auf AC und zugleich C auf $A'B'$ liegen, was unmöglich ist, weil wir die 6 Ecken der beiden Dreiecke als voneinander verschieden annehmen müssen. Setzen wir daher $A'' = (OA, \gamma B'')$, $C'' = (OC, \alpha B'')$, $D = (A'C', A''B'')$, $D' = (AC, B''C'')$, $D'' = (AB, B'C')$ (Fig. 58), so haben wir die beiden Sechsecke $CABB''\alpha C'$ und $A'C'B'B''\gamma A$, deren Ecken abwechselnd auf je zwei Geraden liegen, so daß nach dem Pascalschen Satze in je einer Geraden liegen die Punkte D', D'', O und D, D'', O, also auch O, D, D', D''. Betrachten wir daher endlich das Pascalsche Sechseck $DB''D'AD''C'$, so folgt in der Tat, daß die Punkte γ, α und β in einer Geraden liegen.

Im Besitze der Sätze des Pascal und Desargues können wir wie in den Paragraphen 4 und 5 die projektive Geometrie sowie die Grundformeln der Metrik entwickeln. Es ist also wirklich durch Hjelmslev bewiesen worden, daß der *Aufbau der Geometrie der Ebene in dieser allein ohne das Parallelenaxiom und ohne ein Stetigkeitsaxiom möglich ist.* Aber es läßt sich nicht verkennen, daß der Beweis der Fundamentalsätze auf diesem Wege ein sehr verwickelter ist, so daß es kaum möglich wird, eine Übersicht über den Zusammenhang der einzelnen Teile der Geometrie mit den projektiven Postulaten einerseits und mit den einzelnen Postulaten der Bewegung andererseits zu gewinnen. So würde z. B. bei einer solchen Begründung der Geometrie das schöne Resultat von Pasch, wonach die Einführung der idealen Elemente vom Fundamentalsatze der projektiven Geometrie unabhängig ist, ganz verborgen bleiben. Auch die Unabhängigkeit des Fundamentalsatzes von der Umkehrbarkeit

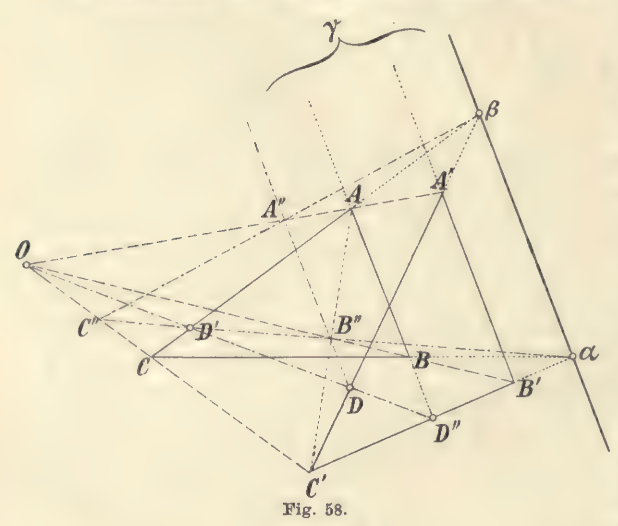


Fig. 58.

der Strecke kommt bei der Beschränkung auf die Ebene nicht zum Ausdruck. Deshalb haben wir unsre Entwicklungen so eingerichtet, daß sie von diesem Paragraphen unabhängig sind. Jedenfalls ist durch Hjelmslev die in dem auf S. 100 zitierten Artikel von Hilbert gegebene Begründung der Bolyai-Lobatzscheffskijschen Geometrie überholt und überflüssig gemacht worden und zugleich diejenige der elliptischen Geometrie (s. Vorrede) von Hessenberg (Math. Ann. Bd. 61, S. 173). Hervorzuheben ist jedoch, daß wiederum die Hjelmslevsche Begründung nur durch die o. a. Untersuchung von Hessenberg möglich wurde.

§ 8.

Das Archimedische Postulat.

No. 51. Projektive Form des Postulats, Vervielfachung und Teilung der Einheit. Wir haben bisher nirgends Rücksicht genommen auf ein Postulat, das allem praktischen Messen zugrunde liegt, auf das sogenannte Postulat des Archimedes[1]), wonach jede Strecke durch hinreichende Vervielfältigung größer gemacht werden kann als jede andere Strecke. Wir haben sonach den Beweis erbracht, daß ein großer Teil der Geometrie von diesem Postulate unabhängig ist. Aber schon eine vollkommene Einsicht in die Bedeutung der trigonometrischen Formeln ist ohne ein solches Postulat nicht möglich, weil nur durch dieses der Zusammenhang der geometrisch definierten trigonometrischen Funktionen mit der Exponentialfunktion hergestellt werden kann. Diese Untersuchung müssen wir nachholen und besonders auch die Vereinfachungen studieren, die unser System von Postulaten durch dies neue etwa erfahren könnte. Wir wollen dabei zunächst von den Postulaten der Bewegung, also auch vom Pascalschen Satze absehen und dem Postulate zuerst eine projektive Form geben. In § 4 haben wir ja gesehen, daß selbst bei Fortlassung des Pascalschen Satzes für die dort definierte Addition und Multiplikation von projektiven Strecken alle Gesetze gelten bis auf das kommutative Gesetz der Multiplikation. Einer besonderen Betrachtung bedarf aber noch die Unterscheidung der projektiven Strecken nach dem Vorzeichen und der damit verknüpften Regeln, die wir dort der Einfachheit wegen auf den Fundamentalsatz aufbauten.

So lange wir die Rechnung mit projektiven Strecken auf eine Gerade beschränken und auf drei solche eigentliche Punkte U, O, E beziehen, daß E auf $\overline{OU}$ liegt, kann jedenfalls die in der 12. Defi-

---

1) Dieses Postulat verbirgt sich bei Euklid in der vierten Definition des 5. Buches: „Ein Verhältnis zueinander haben Größen, welche vervielfältigt einander übertreffen können". Das Postulat ist aber schon von früheren Geometern, vermutlich bereits von Eudoxus benutzt worden.

nition auf S. 64 gegebene Definition des Vorzeichens der Strecken (OF) dieser Geraden bestehen bleiben, und es gilt auch der 61. Satz, zu dessen Beweise nur eigentliche Punkte und nur Prospektivitäten benutzt wurden; auf den 62. Satz wollen wir erst später eingehen.

Nunmehr bilden wir wie auf S. 55 die Reihe der Punkte E_2, E_3, E_4 usw., die durch die Gleichungen:

$$(OE) + (OE) = (OE_2), \quad (OE_2) + (OE) = (OE_3),$$
$$(OE_3) + (OE) = (OE_4), \text{ usw.}$$

bestimmt sind, also, wie Fig. 59 lehrt, so liegen, daß harmonisch getrennt sind:

U, E von O, E_2; U, E_2 von E, E_3; U, E_3 von E_2, E_4, usw.

Die Figur zeigt zugleich, daß E_n auf der Strecke $\overline{E_{n-1}U}$ liegt. Der Definition gemäß entspricht die projektive Strecke (OE_n) der ganzen Zahl n, und wir wollen, entsprechend dem Archimedischen Postulate in seiner bekannten Form, voraussetzen, daß es keine positive Strecke (OP) gebe, die größer wäre als jedes (OE_n). Somit werden wir das folgende Postulat annehmen:

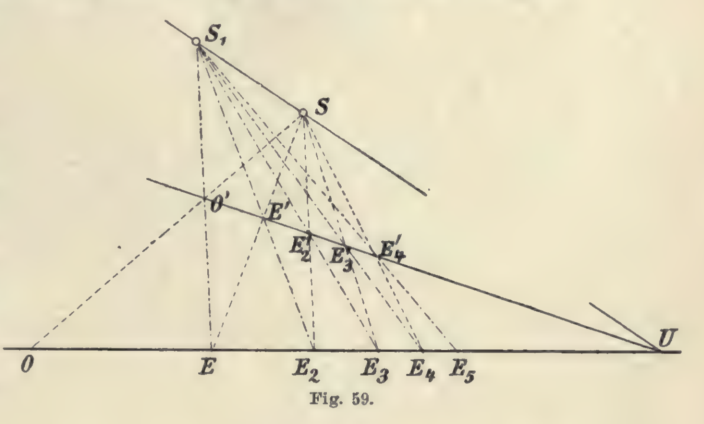


Fig. 59.

15. Postulat. *Sind E und P irgend zwei Punkte der Strecke $\overline{OU}$, und man konstruiert der Reihe nach die vierten harmonischen Punkte E_2 von O für E und U, E_3 von E für E_2 und U, E_4 von E_2 für E_3 und U, usw., E_n von E_{n-2} für E_{n-1} und U, so gibt es in dieser Reihe stets einen solchen Punkt E_n, daß P auf der Strecke $\overline{OE_n}$ liegt.*[1])

Wir können das Postulat gewissermaßen als eine Abstraktion aus den Erfahrungen des Linearzeichnens ansehen. Das auf S. 124

1) Vgl. F. Klein, Gutachten, betr. den 3. Band der Theorie der Transformationsgruppen, von S. Lie, physik. mathem. Gesellschaft, Kasan, 1897, p. 22 (abgedruckt in Bd. 50 der mathematischen Annalen). Vgl. auch Veronese, Fondamenti di Geometria, Padova, 1891; p. XXIX.

nach Hilbert aus 1 und einer unbestimmten Größe t gebildete Zahlensystem lehrt zudem, daß *dies Postulat keine Folge der übrigen Postulate sein kann.* Denn wir können aus diesem Größensystem eine Geometrie aufbauen, in dem alle übrigen Postulate gelten (bei geeigneter Festsetzung der Bedeutung eigentlicher Punkte sogar auch eins der Parallelenaxiome), ohne daß dies letzte Postulat Geltung hat. Wählt man nämlich als U, O, E die Punkte der Achse OX mit den Abszissen t, 0, 1, so hat der Punkt E_n die Abzisse $e_n = nt : n - 1 + t$ (es ist dann in der Tat das Doppelverhältnis $(t, e_n, e_{n-1}, e_{n+1}) = -1$), so daß nach unsern Festsetzungen nicht nur $t - e_n$, sondern auch $t - 1 - e_n$ positiv bleibt, wie groß auch n werden mag, d. h. der der Strecke $\overline{OU}$ angehörige Punkt mit der Abszisse $t - 1$ kann durch projektive Vervielfältigung der Strecke (OE) nicht überschritten werden.

Wir bemerken zuvörderst, daß in der Reihe E, E_2, E_3 usw. keine neuen Punkte erscheinen würden, wenn wir statt des Punktes E einen der Punkte E_m zum Ausgangspunkt der Konstruktion genommen hätten; denn für die Addition, durch die der ersten Definition zufolge die Punkte dieser Reihe gebildet sind, gelten die gewöhnlichen Regeln. Weiter ist klar, daß der Punkt P, wenn er nicht mit einem Punkte der Reihe zusammenfällt, auf einer Strecke $\overline{E_{n-1}E_n}$ liegen muß; denn unter den Strecken $\overline{OE_n}$, auf denen P liegt, und deren Anzahl endlich ist, muß es eine mit kleinstem Index geben, der auch 1 sein kann, so daß P auf $\overline{OE}$ läge ($E_0 \equiv O, E_1 \equiv E$).

In analoger Weise können wir nun diejenigen Punkte $E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{1}{3}}, \ldots, E_{\frac{1}{n}}$ konstruieren, welche der Teilung der Einheitsstrecke (OE) in eine Anzahl gleicher Teile entsprechen. Sind nämlich S und S_n zwei solche Punkte, daß O auf $\overline{SS_n}$ liegt (Fig. 60), so enthält $\overline{S_nE}$ einen Punkt E_n' von $\overline{SE_n}$, $\overline{UE_n'}$ einen Punkt O' von $\overline{SO}$ und E' von $\overline{SE}$, so daß $\overline{S_nE'}$ die $\overline{OE}$ in dem gesuchten Punkte $E_{\frac{1}{n}}$ trifft.

Fig. 60.

In der Tat verwandelt die zentrale Kollineation mit dem Zentrum U, der Achse OS und E als dem Bilde von E_n auch E in $E_{\frac{1}{n}}$, so daß die n-malige Addition von $\left(OE_{\frac{1}{n}}\right)$ zu (OE) führt. Setzen wir $T = (\overline{S_n E'}, \overline{SE_n})$, $E_{-1} = (\overline{OU}, \overline{O'T})$ und $\varepsilon = (\overline{O'T}, \overline{SE'})$, so sind ε und E harmonisch getrennt durch S und E', folglich auch (von O' aus) U und O von E und E_{-1} sowie (von T aus) E und E_{-1} von E_n und $E_{\frac{1}{n}}$. Ist daher P ein Punkt auf $\overline{EE_n}$, so enthält $\overline{SP}$ einen Punkt R von $\overline{\varepsilon T}$ und $E'R$ einen Punkt Q von $\overline{E_{\frac{1}{n}}E}$; denn man beweist leicht, daß E und $E_{\frac{1}{n}}$ auf verschiedenen Seiten der Geraden $E'R$ liegen. Offenbar ist Q von P harmonisch getrennt durch E und E_{-1}, und man zeigt ebenso, daß jedem Punkte Q von $\overline{E_{\frac{1}{n}}E}$ ein Punkt P auf $\overline{EE_n}$ entspricht. Hierbei kann man die Figur auch so konstruieren, daß $E_{\frac{1}{n}}$ irgend ein Punkt von $\overline{OQ}$ ist, so daß wir schließen können, daß der vierte harmonische Punkt P von Q in bezug auf E und den von n unabhängigen Punkt E_{-1} jedenfalls auf $\overline{EU}$ liegt. Hieraus ergibt sich das wichtige Resultat, daß *jede Strecke* $\overline{OQ}$ *von* $\overline{OE}$ *Punkte der Reihe* $E_{\frac{1}{2}}, E_{\frac{1}{3}}, \ldots, E_{\frac{1}{n}}$ *enthalten muß.* Denn sucht man den vierten harmonischen Punkt P von Q für E und E_{-1}, so gibt es nach unserm Postulate einen solchen Punkt E_n, daß P auf $\overline{OE_n}$ liegt, also nach dem obigen auch einen Punkt $E_{\frac{1}{n}}$ auf $\overline{OQ}$.

Ebenso nun wie man aus der Einheitsstrecke (OE) die Reihe $E_2, E_3, \ldots, E_n$ konstruiert, kann man aus jeder Teilstrecke $\left(OE_{\frac{1}{n}}\right)$ die Reihe $E_{\frac{2}{n}}, E_{\frac{3}{n}}, \ldots, E_{\frac{m}{n}}$ konstruieren, wo m und n irgend welche positive ganze Zahlen bedeuten, und es läßt sich zeigen, daß *es keine Strecke* $\overline{AB}$ *auf* $\overline{OU}$ *geben kann, die bei geeigneter Wahl von* m *und* n *nicht Punkte dieser Reihe enthielte.* Indem wir annehmen, daß weder A noch B einer solchen Reihe angehören, und daß A auf $\overline{OB}$ liege, machen wir zuerst $(OQ) = (AB)$, bestimmen also in der Prospektivität mit dem Deckelemente U, bei der B das Bild von A ist, den O entsprechenden Punkt Q. Dann gibt es nach dem obigen auf $\overline{OQ}$ stets einen Punkt $E_{\frac{1}{n}}$, wobei natürlich auch $n = 1$ sein

kann. Weiter gibt es nach unserm Postulate in der Reihe der Punkte $E_{\frac{1}{n}}$, $E_{\frac{2}{n}}$, $E_{\frac{3}{n}}$, usw. stets einen ersten $E_{\frac{m}{n}}$, der auf der Strecke $\overline{AU}$ liegt, während $E_{\frac{m-1}{n}}$ der Strecke $\overline{OA}$ angehört. $E_{\frac{m}{n}}$ muß nun notwendig auch auf $\overline{AB}$ liegen. Nach unserer Definition der Addition (vgl. Formel (I) auf S. 53) ist nämlich

$$\left(E_{\frac{m-1}{n}} E_{\frac{m}{n}}\right) = \left(E_{\frac{m-1}{n}} A\right) + \left(A E_{\frac{m}{n}}\right),$$

also nach dem 61. Satze $\left(A E_{\frac{m}{n}}\right) < \left(E_{\frac{m-1}{n}} E_{\frac{m}{n}}\right) < (O\,Q)$, welches gleich (AB) ist. Folglich liegt nach demselben Satze $E_{\frac{m}{n}}$ auf AB.

No. 52. Trennung von vier Elementen. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie. Das kommutative Gesetz der Multiplikation. Um hieraus den Beweis des Fundamentalsatzes abzuleiten, müssen wir zuvor die allgemeine Unterscheidung der projektiven Strecken nach ihrem Vorzeichen unabhängig von diesem Satze durchführen. Wir stellen hierzu die folgende Definition auf:

27. Definition. *Zwei Strahlen a und b (Ebenen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$) heißen von zwei Strahlen c und d (Ebenen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$) eines Büschels mit eigentlichem Zentrum (Achse) getrennt, wenn zwei Punkte A und B von a und b ($\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$), die auf derselben Seite von d ($\mathfrak{d}$) liegen, sich auf verschiedenen Seiten von c ($\mathfrak{c}$) befinden.*

Es ist dann zunächst leicht zu sehen, daß irgend zwei andre Punkte A' von a ($\mathfrak{a}$) und B' von b ($\mathfrak{b}$), die derselben Halbgeraden (Halbebene) in bezug auf das Zentrum (die Achse) des Büschels angehören wie A resp. B, ebenfalls auf derselben Seite von d ($\mathfrak{d}$) und auf verschiedenen Seiten von c ($\mathfrak{c}$) liegen; dasselbe gilt auch, wenn A' und B' jedesmal der andern Halbgeraden (Halbebene) angehören (vgl. die Sätze 8 auf S. 10 und 10 auf S. 12). Dann ergibt sich zugleich im zweiten Falle, daß A' und B auf derselben Seite von c ($\mathfrak{c}$) und auf verschiedenen Seiten von d ($\mathfrak{d}$) liegen. Ist endlich D ein Punkt von d ($\mathfrak{d}$), der auf der andern Seite von b liegt wie A, so daß $\overline{AD}$ einen Punkt B von b ($\mathfrak{b}$) enthält, so liegen A und B auf derselben Seite von d ($\mathfrak{d}$), der Definition gemäß also auf verschiedenen Seiten von c ($\mathfrak{c}$). Demnach enthält auch $\overline{AB}$ einen Punkt C von c ($\mathfrak{c}$) und man sieht nun, daß auch umgekehrt C und D auf derselben Seite von a ($\mathfrak{a}$) und auf verschiedenen Seiten von b ($\mathfrak{b}$)

liegen. Das Getrenntsein der Strahlen (Ebenen) eines Büschels ist daher eine *wechselseitige Beziehung.*

Aus der Definition ergibt sich unmittelbar der Satz:

117. Satz. *Liegen vier Strahlen a, b, c, d eines Büschels perspektiv mit vier Ebenen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ eines Büschels, so ist jedesmal, wenn a von b getrennt ist von c und d, auch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ getrennt von $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$, und umgekehrt.*

Hieraus folgt weiter:

118. Satz. *Liegen zweimal vier Strahlen a, b, c, d und $\mathfrak{a}', \mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \mathfrak{d}'$ zweier Büschel mit eigentlichen Zentren perspektiv in bezug auf irgend eine Gerade, so ist jedesmal, wenn a von b getrennt ist durch c und d, auch a' von b' getrennt durch c' und d'.*

Liegen nämlich die beiden Strahlenbüschel in verschiedenen Ebenen, so folgt der Satz unmittelbar aus dem vorigen und im andern Falle hieraus durch Einschub eines außerhalb der Ebene gelegenen Strahlenbüschels, das zu den beiden gegebenen perspektiv ist. Hiernach können wir die Definition aufstellen:

28. Definition. *Von vier beliebigen (eigentlichen oder uneigentlichen) Punkten A, B, C, D einer Geraden heißen A von B* **getrennt** *durch C und D, wenn von den Verbindungsstrahlen der vier Punkte mit irgend einem eigentlichen Punkte S SA von SB getrennt ist durch SC und SD.*

Dann folgt aus dem 118. Satze:

119. Satz. *Zwei Paare getrennter Punkte einer Geraden werden von jedem Zentrum aus auf jede Gerade wieder in zwei Paare getrennter Punkte projiziert.*

Denn eine solche Projektion kann stets auch von einer eigentlichen Achse aus geschehen. Daraus erhalten wir den für uns wichtigsten Satz:

120. Satz. *Ist $A, B, C, D \barwedge A', B', C', D'$, so ist jedesmal, wenn A von B getrennt ist durch C und D, auch A' von B' getrennt durch C' und D'.*

Nunmehr können wir auf Grund der Betrachtungen am Anfange dieses Paragraphen den *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie* (48. Satz auf S. 49) leicht indirekt beweisen. Gäbe es mehr als eine Projektivität, durch die drei Punkten A, B, C einer Geraden g drei Punkte A', B', C' einer Geraden g' zugeordnet sind, so gäbe es auch eine Projektivität, die drei Punkte A, B, C einer Geraden stehen läßt, ohne zugleich jedem andern Punkte D ihn selbst zuzuordnen.

Dann gäbe es aber auch eine solche Projektivität in dem Falle, daß die drei Punkte solche eigentliche Punkte U, O, E wären, daß E auf $\overline{OU}$ liegt. Um dies einzusehen, braucht man U und O nur auf zwei eigentlichen Geraden SA und SB (S eigentlich) so anzunehmen, daß sie auf verschiedenen Seiten von SC liegen, und jene Projektivität durch eine zentrale Kollineation mit dem Zentrum S in eine solche zwischen den Punkten der Geraden UO zu verwandeln.

Nun entspricht in einer solchen Projektivität auf Grund des 43. Satzes auf S. 46 sicher jeder Punkt der Reihe $E_{\frac{m}{n}}$ sich selbst, daher muß auch das Bild F' jedes andern Punktes F der Strecke $\overline{OU}$ mit F zusammenfallen. Aus dem 120. Satze folgt nämlich zuerst, daß auch F' auf $\overline{OU}$ liegt, weil F von E_{-1} durch U und E getrennt ist, dasselbe also auch von F' gelten muß. Nun haben wir gesehen, daß die Strecke $\overline{FF'}$ jedenfalls einen Punkt $E_{\frac{m}{n}}$ enthalten muß. Läge dann etwa F auf $\overline{OF'}$, so wäre O von $E_{\frac{m}{n}}$ durch F und und U getrennt, hingegen durch F' und U nicht, und das ist nach dem 120. Satze unmöglich, weil $OE_{\frac{m}{n}}FU \barwedge OE_{\frac{m}{n}}F'U$ sein soll. Entspricht aber jeder Punkt der Strecke $\overline{OU}$ sich selbst, so gilt nach dem 42. Satze dasselbe auch für jeden andern Punkt der Geraden OU, und *der Fundamentalsatz ist vollständig bewiesen.*[1])

Aus der Geltung des Fundamentalsatzes ergibt sich sofort auch das *kommutative Gesetz der Multiplikation.* Denn da der 11. Definition gemäß $(OC) = (OA) \cdot (OB)$ ist, wenn $UOEB \sim UOAC$, so ist auch $UOEB \barwedge OUCA$, es entspricht daher C dem Punkte E in einer Involution, in der U, O und A, B Paare zugeordneter Punkte sind, ist also von der Reihenfolge der Punkte A und B unabhängig. Nach den Entwicklungen in § 4 können wir aber das kommutative Gesetz der Multiplikation auch unmittelbar aus dem 15. Postulate beweisen. Wie schon erwähnt wurde, konnten wir für das dort definierte Rechnen mit projektiven Strecken aus den projektiven

1) Vgl. hierzu Pasch, Neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 123ff. Der Gedanke, auf dem der obige Beweis beruht, ist im Grunde genommen derselbe, den schon Euklid im V. Buche der Elemente zu der berühmten Begründung seiner Proportionslehre benutzt hat. Vgl. Stolz, Allgemeine Arithmetik, Leipzig 1885, VI. Abschnitt, und Schur, Lehrbuch der analytischen Geometrie, S. 8. Für die allgemeine Literatur zum Beweise des Fundamentalsatzes siehe Enriques, Prinzipien der Geometrie, Encyk. d. math. Wiss., Bd. III, S. 77ff. Wegen des Staudtschen Satzes oder des Fundamentalsatzes auf Grund der Staudtschen Definition der Projektivität siehe den Schluß dieses Paragraphen.

Postulaten allein alle Regeln des gewöhnlichen Rechnens nachweisen mit Ausnahme eben des kommutativen Gesetzes der Multiplikation. Was aber die auf das Vorzeichen der Strecken bezüglichen Regeln betrifft, so beruhte der Nachweis des 62. Satzes zum Teil auf dem Fundamentalsatze. Doch ergibt sich nicht nur der fehlende Teil, sondern auch der ganze Satz unmittelbar aus dem 120. Satze. Denn ist z. B. (OB) negativ, sind also U, O getrennt durch E und B, so müssen sie auch durch A und C getrennt sein; je nachdem also (OA) positiv oder negativ ist, ist (OC) negativ oder positiv. Das Entsprechende folgt für ein positives (OB), wobei nur die beiden Fälle, daß B auf $\overline{OE}$ oder $\overline{EU}$ liegt, gesondert zu behandeln sind.

Nun folgt weiter leicht, daß das kommutative Gesetz jedenfalls gilt, wenn einer der beiden Faktoren eine der ganzen Zahl n entsprechende Strecke (OE_n) unsrer Reihe ist. Da nämlich für die projektive Ähnlichkeit der Fundamentalsatz (52. Satz) auch unabhängig vom Pascalschen Satze gilt, so ist $(OE)\cdot(OB) = (OB) = (OB)\cdot(OE)$, also, weil das distributive Gesetz in bezug auf jeden der beiden Faktoren bewiesen wurde:

$$\begin{aligned}&(OE_n)\cdot(OB) = ((OE)+(OE)+\cdots+(OE))(OB)\\ &= (OE)(OB)+(OE)\cdot(OB)+\cdots+(OE)(OB)\\ &= (OB)(OE)+(OB)(OE)+\cdots+(OB)(OE) = (OB)(OE_n).\end{aligned}$$

Bedenken wir nun, daß:

$$\begin{aligned}(OE_n)\left(OE_{\frac{1}{n}}\right) &= ((OE)+(OE)+\cdots+(OE))\left(OE_{\frac{1}{n}}\right)\\ &= \left(OE_{\frac{1}{n}}\right)+\left(OE_{\frac{1}{n}}\right)+\cdots+\left(OE_{\frac{1}{n}}\right) = (OE)\end{aligned}$$

ist, so folgt aus $(OC) = (OB)(OE_n) = (OE_n)(OB)$, daß $(OC)\left(OE_{\frac{1}{n}}\right) = (OB) = \left(OE_{\frac{1}{n}}\right)(OC)$ ist, und hieraus wiederum, daß das kommutative Gesetz für jedes Produkt $(OB)\left(OE_{\frac{m}{n}}\right) = (OC)$ gilt. Setzen wir nunmehr für positive (OA) und (OB) das Produkt $(OA)(OB) = (OC)$, hingegen $(OB)(OA) = (OC')$ und nehmen an, daß etwa $(OC') > (OC)$ sei, so gibt es nach dem Obigen auf der Strecke $\overline{CC'}$ stets einen Punkt $E_{\frac{m}{n}}$ unsrer Reihe. Ist dann $\left(UOAE_{\frac{m}{n}}\right) \sim (UOED)$, also $(OA)(OD) = \left(OE_{\frac{m}{n}}\right)$, so muß $(OD) > (OB)$ sein. Ist andrerseits $(OD)(OD') = (OE)$, also $(OA) = \left(OE_{\frac{m}{n}}\right)(OD') = (OD')\left(OE_{\frac{m}{n}}\right)$

oder $(OD)(OA) = \left(OE_{\frac{m}{n}}\right)$, so würde folgen, daß $(OD) < (OB)$ ist. Demnach führt die Annahme, daß C von C' verschieden sei, auf einen Widerspruch, so daß das kommutative Gesetz der Multiplikation für alle positive Strecken gelten muß; daraus ergibt es sich auch für den Fall, daß einer der beiden Faktoren oder beide negativ sind[1]). Gilt aber das kommutative Gesetz der Multiplikation, so gilt nach Figur 24 auf S. 58 auch der Pascalsche Satz und deshalb auch der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

No. 53. Unbeweisbarkeit des Pascalschen Satzes aus den projektiven Postulaten allein. Gleichung der Geraden in der Nicht-Pascalschen Geometrie. Wir haben den Fundamentalsatz auf Grund der projektiven Postulate und einerseits der Postulate der Bewegung und andrerseits des Archimedischen Postulats in projektiver Form bewiesen. Da entsteht nun die Frage, ob etwa der Fundamentalsatz ebenso wie der Desarguessche Satz aus den projektiven Postulaten allein bewiesen werden könne. Solche Versuche sind gemacht worden, und es ist das große Verdienst von Hilbert[2]), gezeigt zu haben, daß sie immer vergeblich bleiben müssen, daß vielmehr der Fundamentalsatz oder, was nach unsern Untersuchungen auf dasselbe hinauskommt, *der Pascalsche Satz aus den projektiven Postulaten allein nicht bewiesen werden kann.*

Aus diesen Postulaten haben wir ein Größensystem, das System der projektiven Strecken, abgeleitet, in dem alle Regeln der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division sowie des Größer- und Kleiner-Seins gelten bis auf das kommutative Gesetz der Multiplikation, dessen Gültigkeit eben entweder aus dem Pascalschen Satze oder aus dem Archimedischen Postulate erschlossen wurde. Gelingt es nun arithmetisch ein solches Größensystem aufzustellen, welches dieselben Eigenschaften besitzt, für das aber das kommutative Gesetz der Multiplikation sicher *nicht* gilt, so können wir aus ihm wie auf S. 107 eine Geometrie aufbauen, in der die projektiven Postulate gelten. Denn die dort gemachten Schlüsse sind so eingerichtet, daß sie auch gültig bleiben, wenn die Faktoren der Produkte der Größen des Systems die angeschriebene Reihenfolge nicht ändern dürfen. Gründen wir nun in dieser Geometrie eine projektive Streckenrechnung auf die auf S. 112 angegebenen Elemente, wobei zwei Geraden

1) Vgl. hierzu Hilbert, Grundlagen der Geometrie, § 32, wo ein etwas anderes Verfahren eingeschlagen wird.

2) Hilbert, a. a. O., §§ 33 u. 34.

P_1P_2 und $P_1'P_2'$ als parallel gelten, wenn es zwei solche Größen u und u' gibt, daß $(x_2 - x_1)u = (x_2' - x_1')u'$, usw. ist, so wird in ihr das kommutative Gesetz der Multiplikation gelten oder nicht, je nachdem es für unser Größensystem Geltung besitzt oder nicht. Gilt also in unserm Größensystem das kommutative Gesetz der Multiplikation wirklich nicht, so kann in dieser Geometrie, in der alle projektiven Postulate gelten, auch der Fundamentalsatz keine Geltung haben.

Das gesuchte Größensystem wird nach Hilbert (a. a. O., § 33) folgendermaßen gebildet. Es sei t ein Parameter und T irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Gestalt:

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \cdots,$$

wo $r_0 (\gtrless 0)$, r_1, r_2, $r_3 \ldots$ beliebige rationale Zahlen bedeuten und n eine beliebige ganze rationale Zahl $\left(\gtreqless 0\right)$ sein möge. Ferner sei s ein andrer Parameter und S irgend ein Ausdruck mit einer endlichen oder unendlichen Gliederzahl von der Form

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \cdots,$$

wo $T_0 (\gtrless 0)$, T_1, $T_2 \ldots$ beliebige Ausdrücke von der Gestalt T bezeichnen und m wiederum eine beliebige ganze rationale Zahl $\left(\gtreqless 0\right)$ sein möge. Die Gesamtheit aller Ausdrücke von der Gestalt S sehen wir als ein Größensystem $\Omega(s, t)$ an, in dem wir folgende Rechnungsregeln festsetzen: man rechne mit s und t wie mit Parametern nach den gewöhnlichen Rechnungsregeln mit der Ausnahme, daß nicht $ts = st$, sondern $\boldsymbol{ts = 2st}$ gesetzt werde.

Sind nun S', S'' irgend zwei Ausdrücke von der Gestalt S:

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T_2' + \cdots,$$
$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T_1'' + s^{m''+2} T_2'' + \cdots,$$

so kann man offenbar durch Zusammenfügung einen neuen Ausdruck $S' + S''$ bilden, der wiederum von der Gestalt S und zugleich eindeutig bestimmt ist; dieser Ausdruck $S' + S''$ heißt die Summe der durch S' und S'' dargestellten Größen. Durch gliedweise Multiplikation der beiden Ausdrücke S' und S'' gelangen wir zunächst zu einem Ausdrucke von der Gestalt:

$$S'S'' = s^{m'} T_0' s^{m''} T_0'' + (s^{m'} T_0' s^{m''+1} T_1'' + s^{m'+1} T_1' s^{m''} T_0'') + \cdots,$$

der bei Benutzung der Regel $ts = 2st$ offenbar ein eindeutig bestimmter Ausdruck von der Gestalt S wird und das Produkt $S' \cdot S''$ heißen

soll. Denn es ist für ein positives n das Produkt $t^n s = 2t^{n-1}st = 4t^{n-2}st^2 = \cdots 2^n st^n$; handelt es sich um negative Potenzen, so benutzt man die beiden Regeln $ts^{-1} = \frac{1}{2}s^{-1}t$ und $t^{-1}s = \frac{1}{2}st^{-1}$, deren Richtigkeit man dadurch bestätigt, daß man die erste rechtsseitig mit s und die zweite linksseitig mit t multipliziert.

Nun fragt sich aber noch, ob bei dieser Festsetzung der Rechnungsregeln die Division ausführbar ist, d. h. ob S'' immer so bestimmt werden kann, daß $S'S'' = 1$ ist. Setzt man dazu zuerst $m'' = -m'$ und verwandelt $T_0's^{m''}$ nach obigen Regeln in $s^{m''}\overline{T}_0'$, so ist der erste Koeffizient hiervon nach unsern Festsetzungen von 0 verschieden, so daß man T_0'' aus $\overline{T}_0' \cdot T_0'' = 1$ bestimmen kann. Ebenso kann T_1'' so bestimmt werden, daß das zweite Glied der rechten Seite von $S'S''$ fortfällt, usf., so daß die Division in der Tat eindeutig ausführbar ist.

Um endlich die Anordnung der Größen unsres Systems zu ermöglichen, nennen wir eine Größe S positiv oder negativ, je nachdem in dem sie darstellenden Ausdrucke der erste Koeffizient r_0 von T_0 positiv oder negativ ausfällt. Definiert man dann das Größer- und Kleiner-Sein wie in der 13. Definition auf S. 64, so erkennt man leicht die Gültigkeit der Sätze 61 und 62 daselbst.

Unser Größensystem besitzt also alle Eigenschaften des Systems der projektiven Strecken, nur das kommutative Gesetz der Multiplikation ist *nicht* erfüllt. Demnach kann das System auch dem Archimedischen Postulate nicht genügen, was leicht bestätigt werden kann; denn die Größe $t - ns$ bleibt z. B. für jedes n positiv. Jedenfalls haben wir nun ein Größensystem, wie wir es brauchen, konstruiert und können das wichtige Resultat aussprechen:

121. Satz. *Der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (48. Satz) kann aus den projektiven Postulaten (1—8) allein nicht bewiesen werden.*

In der von uns aufgestellten *Nicht-Pascalschen Geometrie,* wie Hilbert sie nennt, sind nach S. 108 *die Geraden und Ebenen dennoch durch lineare Gleichungen dargestellt.* Es läßt sich dies auch unabhängig von der besonderen Entstehung einer solchen Geometrie aus dem Bestehen der projektiven Postulate erweisen[1]). Sind OX und OY die beiden Koordinatenachsen einer Ebene (Fig. 61), U, E der Unendlichkeits- resp. Einheitspunkt für eine projektive Streckenrechnung auf OX und V, F von der entsprechenden Bedeutung auf OY, so sehen wir, falls VP und UP die Achsen OX und OY in

1) S. Hilbert a. a. O., § 27.

Q und R schneiden, $x = (OQ)$ und $y = (OR)$ als die Koordinaten irgend eines Punktes P der Ebene an[1]) und nennen zwei projektive Strecken verschiedener Achsen gleich, wenn die sie bestimmenden zweimal vier Punkte in Beziehung auf einen Punkt von UV perspektiv liegen. Sind in der Tat $UOAC$ und $UOA'C'$ zu denselben Punkten auf OV perspektiv, so ist nach der 10. Definition auf S. 56 $UOAC \sim UOA'C'$, setzt man also $UOAC \sim UOEB$ und $UOA'C' \sim UOEB'$, so fällt nach dem

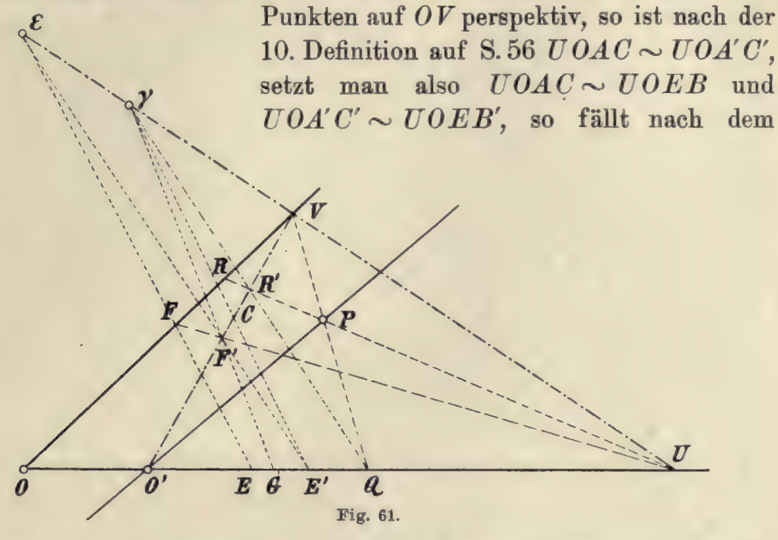


Fig. 61.

53. und dem 52. Satze B mit B' zusammen. Führen wir dann die Verbindungslinie von V mit irgend einem Punkte $O'(a, o)$ auf OX als neue Ordinatenachse $O'Y'$ ein, indem wir auf ihr als Einheitspunkt den Punkt $F' = (UF, O'Y')$ wählen, so ist $y' = (VO'F'R') = (VOFR) = y$. Wählen wir ferner als den zu O' auf $O'U$ gehörigen Einheitspunkt den Punkt E', für den UOE prosp. $UO'E'$ oder UOO' prosp. UEE' ist, so daß sich EF und $E'F'$ in ε auf UV schneiden, so ist $(O'E') = (OE) = 1$ und

$$x = (OO') + (UO'EQ) = a + (UO'EE')(UO'E'Q),$$

also nach der 11. Definition des Produkts auf S. 56

$$x = a + (O'E')x' = a + x'.$$

Nun folgt weiter aus dem Desarguesschen Satze, daß die Gerade QR' für alle Punkte derselben Geraden $O'P$ durch denselben Punkt γ von UV läuft. Projizieren wir daher F' von diesem festen Punkte γ nach G auf OU und E' nach C auf $O'V$ und setzen $(VO'FC) = c$, so hat c für alle Punkte der Geraden denselben

1) Vgl. W. Fiedler, Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage, Leipzig 1875, S. 549 u. 739.

Wert, und es wird

$$y = y' = (UO'GQ) = (UO'GE') \cdot (UO'E'Q) = cx' = c(x - a).$$

Sind also P_1 und P_2 irgend zwei Punkte der Geraden, und setzen wir

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)u,$$

so ist auch

$$y_1 + (y_2 - y_1)u = c(x_1 - a) + c(x_2 - x_1)u = c(x_1 + (x_2 - x_1)u - a) = c(x - a) = y.$$

Dieselben Formeln gelten auch für den Fall, daß die Gerade durch V oder U geht, insofern dann entweder $x_2 = x_1$ oder $y_2 = y_1$ wird.

Nimmt man entsprechend drei nicht in derselben Ebene gelegene Achsen OX, OY, OZ an und auf ihnen die Unendlichkeitspunkte U, V, W und die Einheitspunkte E, F, G und sieht als Koordinaten die projektiven Strecken $x = (OQ)$, $y = (OR)$, $z = (OS)$ an, wo Q, R, S die Schnittpunkte der Achsen OX, OY, OZ mit den Ebenen PVW, PWU, PUV resp. sind, so ergeben sich die Gleichungen einer Geraden durch Betrachtung ihrer Projektionen auf die Ebenen XOY, YOZ, ZOX von den Punkten W, U, V aus ebenso in der Form: $x = x_1 + (x_2 - x_1)u$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)u$, $z = z_1 + (z_2 - z_1)u$. Über die Bedeutung und die Grenzen von u läßt sich hier allerdings ohne eine Annahme darüber, welche von den Beziehungselementen eigentliche sind, nichts aussagen. Es muß auch hervorgehoben werden, daß bei der von uns festgesetzten Definition des Produkts zweier projektiver Strecken die Formeln $x = x_1 + u(x_2 - x_1)$, usw. im allgemeinen, d. h. ohne Bestehen des kommutativen Gesetzes keine Gerade darstellen würden.

No. 54. Das eigentliche Archimedische Postulat. Umkehrbarkeit der Strecke und des Winkels. Parallelenaxiom. Nachdem wir die Bedeutung des projektiv gefaßten Archimedischen Postulats für die projektive Geometrie kennen gelernt haben, wollen wir nunmehr untersuchen, welche *Postulate der Bewegung* etwa durch das Archimedische Postulat überflüssig werden, wobei wir dies in die übliche Form setzen. Wir nehmen also die Postulate 9—11 an, und zwar zunächst für die Ebene. Dann können wir wie in § 3 den Begriff der Umwendung und den von aufeinander senkrechten Geraden entwickeln, ebenso erhalten den absoluten Pol einer Geraden und die absolute Polare eines Punktes. Nunmehr verstehen wir unter *Schiebung* längs der Geraden AB diejenige Bewegung, welche einen Punkt A in B verwandelt, die Halbgerade $(A)B$ in die Verlängerung von AB über B hinaus und die durch AB begrenzten Halbebenen stehen läßt. Alsdann lautet das Archimedische Postulat folgendermaßen:

Archimedisches Postulat. *Geht bei einer Schiebung längs der Geraden AA_1 der Punkt A in A_1 über, dieser in A_2, dieser in A_3 usf., so liegt jeder Punkt der Halbgeraden $(A)A_1$ auf einer der Strecken $\overline{A_n A_{n+1}}$.*

Hieraus können wir zuerst die *Umkehrbarkeit jeder Strecke* oder das 13. Postulat beweisen. Zunächst sieht man, daß bei der Schiebung $\mathfrak{S}$ jede Strecke $\overline{A_{n-1} A_n}$ in die Strecke $\overline{A_n A_{n+1}}$ übergeht, so zwar, daß (der Definition gemäß) A_{n+1} auf der Verlängerung von $\overline{A_{n-1} A_n}$ über A_n hinaus liegt. Daraus geht hervor, daß *jeder Punkt P der Halbgeraden $(A)A_1$ in einen Punkt der Verlängerung von AP über P hinaus übergeht*, weil P nach dem Postulate auf einer der Strecken $\overline{A_{n-1} A_n}$ liegen muß. Betrachten wir nun die Bewegung $\mathfrak{B}$, welche durch die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{S}$ und der Umwendung $\mathfrak{U}$ um die Senkrechte in A_1 auf AA_1 entsteht, so läßt sich zeigen, daß hierbei *nicht nur dem Punkte A der Punkt A_1 entspricht, sondern auch A dem Punkte A_1*. Da nämlich $\mathfrak{S} A_1 = A_2$ ist, so ist $\mathfrak{B} A_1$ ein Punkt der Halbgeraden $(A_1)A$, also entweder A selbst oder ein innerhalb der Strecke $\overline{AA_1}$ gelegener Punkt B oder ein innerhalb der Verlängerung $\overrightarrow{A_1 A}$ gelegener Punkt C. Wäre $\mathfrak{B} A_1 = B$, so wäre die Bewegung $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ eine solche, welche A in B verwandelt, die Halbgerade $(A)A_1$ in $(B)A_1$ und die Halbebene darüber stehen läßt. Da nämlich $\mathfrak{S} B$ ein Punkt von $\overline{A_1 A_2}$ sein müßte, so läge $\mathfrak{B}\mathfrak{B} A_1 = \mathfrak{B} B$ auf $\overline{A_1 B}$. Demnach wäre $\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ einerseits eine Schiebung von A nach B, und es entspräche andererseits dem Punkte A_1 der Halbgeraden $(A)B$ ein nicht auf der Verlängerung $\overrightarrow{AA_1}$ gelegener Punkt, was, wie wir eben sahen, unmöglich ist. Daraus geht hervor, daß $\mathfrak{B} A_1$ nicht innerhalb der Strecke $\overline{AA_1}$ liegen kann. Ebenso wenig kann $\mathfrak{B} A_1 = C$ sein. Denn dann würde die Umkehrung der Bewegung $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{U}$ die Punkte C, A_1 in A_1, A verwandeln, also die zweimalige Anwendung dieser Umkehrung C in A und A_1 in einen Punkt der Strecke $\overline{AA_1}$, was auf denselben Widerspruch führt wie eben. Demnach kann $\mathfrak{B}$ nur diejenige Bewegung sein, welche *die Strecke $\overline{AA_1}$ umkehrt.*[1]) Wir haben also gesehen, daß das Archimedische Postulat das 13. Postulat überflüssig macht. Jede Strecke besitzt daher einen Mittelpunkt, der durch die Endpunkte der Strecke harmonisch getrennt ist von dem Punkte auf seiner absoluten Polare.

Nunmehr können wir die Gültigkeit des *Archimedischen Postu-*

---

1) Vgl. Peano, Sui fondamenti della geometria, Rivista di Matem. Vol. IV, p. 87.

lats in seiner projektiven Form oder des 15. Postulats auf S. 163 beweisen. Wir weisen zuerst auf den Hilfssatz hin:

1. Hilfssatz. *Zwei Punktepaare C, D und C', D' einer Geraden, die durch ein drittes Paar A, B gleichzeitig harmonisch getrennt sind, können einander nicht trennen.*

Zu Beweise können wir annehmen, daß A und B eigentliche Punkte sind und ebenso C und C' auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen. Liegt dann etwa C' auf $\overline{CB}$, ist also A von C' getrennt durch B und C, so muß, weil $ABCC' \barwedge ABDD'$ ist, nach dem 120. Satze auf S. 167 auch A von D' durch B und D getrennt sein. Deshalb ist auch C von D' durch B und D getrennt, also schließlich auch C von D' durch C' und D; deshalb sind in der Tat C und D von C' und D' *nicht* getrennt.

Hieraus ergibt sich weiter:

2. Hilfssatz. *Sind die eigentlichen Punkte A, B harmonisch getrennt von den eigentlichen Punkten C, D und liegt B auf $\overline{AD}$, so ist $\overline{AC} > \overline{CB}$.*

Wir bemerken zuerst, daß, weil die Gesetze der Schiebungen und Umwendungen einer Geraden gelten, auch die 23. Definition auf S. 95 über das Größer- und Kleinersein von Strecken erhalten bleibt. Ist nun N der zur Mitte M von $\overline{AB}$ konjugierte Punkt, so darf N, sofern er überhaupt ein eigentlicher Punkt wäre, jedenfalls nicht auf $\overline{BD}$, also auch nicht auf $\overline{CD}$ liegen, weil er sonst auch auf der Strecke von A nach der Umwendung von D um M liegen würde, die ja der Verlängerung von $\overline{BA}$ über A hinaus angehört. Da nach dem ersten Hilfssatze M von N durch C von D nicht getrennt sein darf, so darf demnach M nicht der Strecke $\overline{CB}$ angehören. Es liegt daher M auf $\overline{AC}$ oder es ist $\overline{AC} > \overline{AM} = \overline{BM} > \overline{BC} = \overline{CB}$.

Sind nunmehr die eigentlichen Punkte U, O, E, P wie am Anfange dieses Paragraphen derart angenommen, daß E auf $\overline{OU}$ und P auf $\overline{EU}$ liegt, so nehmen wir zwei weitere Punkte V und Q so an, daß O auf $\overline{VQ}$ liegt. Alsdann enthält $\overline{UV}$, daß P auf $\overline{SQ}$ liegt, und SE einen Punkt A von $\overline{OQ}$. Projizieren wir daher die Punkte $E_2, E_3, \ldots, E_n$ unserer Skala von S aus nach $B_2, B_3, \ldots, B_n$, so ist nach dem zweiten Hilfssatze $\overline{OA} < \overline{AB_2} < \overline{B_2B_3} < \cdots < \overline{B_{n-1}B_n}$. Gehen andererseits bei der Schiebung von O nach A die Punkte A in A_2, A_2 in $A_3, \ldots, A_{n-1}$ in A_n über, so daß $\overline{OA} = \overline{AA_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots = \overline{A_{n-1}A_n}$ ist, so ist jedenfalls

$$\overline{OA_n} = \overline{OA} + \overline{AA_2} + \cdots + \overline{A_{n-1}A_n}$$
$$< \overline{OA} + \overline{AB_2} + \overline{B_2B_3} + \cdots + \overline{B_{n-1}B_n} = \overline{OB_n}.$$

Da nun nach dem Archimedischen Postulate Q auf einer Strecke $\overline{OA_n}$ liegen muß, so liegt Q auch auf einer Strecke $\overline{OB_n}$, also auch P auf einer Strecke $\overline{OE_n}$. Wir haben also in der Tat das 15. Postulat bewiesen.[1])

Demnach können wir den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie wie am Anfange dieses Paragraphen beweisen und sind deshalb im Besitze aller Sätze dieser Geometrie und besonders auch der gesamten projektiven Streckenrechnung. Wir werden auch schließen können, daß *jede Bewegung jede Gerade in die entsprechende durch eine Projektivität überführt.* Denn bei dieser umgekehrt eindeutigen Beziehung gehen vier harmonische Punkte in ebensolche über und zwei Paare getrennter Punkte in ebensolche. Sind also zu drei Punkten der einen Geraden die ihnen entsprechenden in der anderen bekannt, so beweist man ebenso wie auf S. 168, daß jedem anderen Punkte derselbe Punkt entspricht wie in der dadurch bestimmten Projektivität. Ebenso verwandelt jede Bewegung ein Strahlenbüschel in ein ihm projektives.

Wir können weiter schließen, daß *die Paare konjugierter Punkte jeder Geraden eine Involution bilden,* nämlich die Involution, die nach dem 63. Satze auf S. 67 zu jeder Projektivität, also auch zu einer Schiebung der Geraden gehört; daß diese Involution diejenige der konjugierten Punkte ist, folgt aus der oben bewiesenen Umkehrbarkeit der Strecke. Hieraus ergibt sich, daß auch die *Paare aufeinander senkrechter Strahlen jedes Büschels eine Involution bilden.* Aus dem Obigen folgt nämlich zuerst, daß die absoluten Polaren einer eigentlichen Punktreihe ein zu dieser projektives Strahlenbüschel bilden. Nun ist der zu jedem Strahle senkrechte Strahl eines Büschels die Verbindungslinie des Zentrums mit dem absoluten Pole des Strahles, dieser aber der Schnittpunkt der absoluten Polare des Zentrums mit der absoluten Polare des Schnittpunktes des Strahles mit irgendeiner eigentlichen Geraden. Sind also a, b, c irgend drei Strahlen des Büschels und $a' \perp a$, so kann man diese Gerade so wählen, daß sie alle vier Strahlen wirklich trifft (vgl. die Ausführungen zur 27. Definition auf S. 166). Es ist daher $aa'bc \barwedge a'ab'c'$, so daß in der Tat je drei Paare rechtwinkeliger

1) Vgl. hierzu Pasch, a. a. O. S. 118 ff.

Strahlen eine Involution bilden. Diese Schlußweise würde allerdings versagen, wenn die absoluten Polaren aller Punkte in die eine sogenannte unendlich ferne Gerade fielen, also die *Summe der Winkel jedes Dreiecks gleich zwei Rechten wäre.*

Dann können wir aber aus dem Archimedischen Postulate leicht das *Parallelenaxiom*[1]) beweisen, daß also jede Gerade BC', die zu AA' nicht parallel ist, d. h. auf der Senkrechten AB zu AA' nicht senkrecht steht, AA' schneiden muß (Fig. 62). Ist nämlich $C'A' \perp AA'$ und $BB' \perp C'A'$, so ist nach dem 1. Hilfssatze auf S. 103 auch $AB \perp BB'$, und wir können annehmen, daß C' auf $\overline{A'B}$ liegt; denn andernfalls könnten wir auf BC' einen Punkt C'' annehmen, der auf derselben Seite von BB' liegt wie A. Nunmehr verlängern wir $\overline{BB'}$ und $\overline{BC'}$ über B' und C' hinaus so, daß $\overline{BB_1} = n\overline{BB'}$ und $\overline{BC_1} = n\overline{BC'}$ wird, und beweisen wie in Fig. 40 auf S. 106, daß dann auch $\overline{B_1C_1} \perp \overline{BB_1}$ und $= n\overline{B'C'}$ wird. Wählen wir also, was nach dem Archimedischen Postulate möglich ist, n so groß, daß $n\overline{B'C'} > \overline{B'A'}$ wird, so wird auch $\overline{B_1C_1} > \overline{B_1A_1}$, wo A_1 der Fußpunkt der mit B_1C_1 zusammenfallenden Senkrechten von B_1 auf AA' ist. Deshalb liegen B_1 und C_1, also auch B und C_1 auf verschiedenen Seiten von AA' oder $\overline{BC_1}$ enthält einen eigentlichen Punkt D von AA', w. z. b. w. Daß der durch AA' und BB' bestimmte Punkt kein eigentlicher sein kann, folgt ja daraus, daß er bei allen Schiebungen längs diesen Geraden fest bleiben müßte, während wir auf S. 175 sahen, daß hierbei jeder eigentliche Punkt in einen Punkt der Verlängerung übergeht. Somit ist das Parallelenaxiom vollständig bewiesen. Auf die Formulierung dieses Resultats kommen wir zurück.

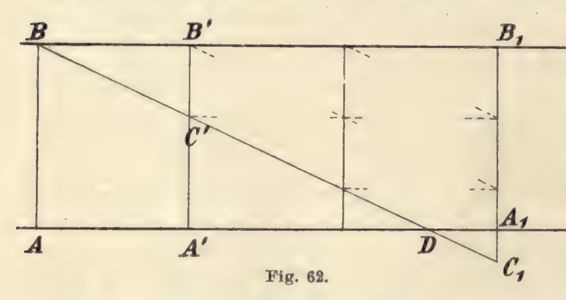


Fig. 62.

Hier beweisen wir aus ihm den Satz vom Höhenschnittpunkt des Dreiecks wie auf S. 135 und daraus unter Umkehrung der Schlüsse auf S. 91, daß je drei Paare senkrechter Strahlen auf der unendlich fernen Geraden Punktepaare einer Involution ausschneiden. Es ist also auch in diesem Falle bewiesen, daß die

---

1) Vgl. Lambert, Theorie der Parallel-Linien, a. a. O. S. 180—185.

Paare auf einander senkrechter Strahlen eines Büschels eine Involution bilden.

Legt man daher im Strahlenbüschel eine projektive Koordinate ξ zugrunde in bezug auf OX als Nullstrahl, den darauf senkrechten OY als Unendlichkeitsstrahl und den Halbierungsstrahl von XOY (Beweis der Umkehrbarkeit des rechten Winkels auf S. 33) als Einheitsstrahl, so besteht zwischen den Koordinaten je zweier senkrechter Strahlen die Gleichung $\xi\xi' = -1$. Da nun irgend eine Bewegung um O eine Projektivität des Strahlenbüschels hervorruft, die nach dem 64. Satze auf S. 67 durch $\alpha\xi\xi_1 + \beta\xi + \gamma\xi_1 + \delta = 0$ dargestellt ist, so erhalten wir als Bedingungen dafür, daß diese Projektivität obige Involution in sie selbst verwandelt, die, daß $\beta\delta = -\alpha\gamma$, $\gamma\delta = -\alpha\beta$ und $\alpha^2 = \delta^2$ ist. Je nachdem also $\alpha = -\delta$ oder $\alpha = \delta$, ist die Bewegung durch die Gleichung $\alpha\xi\xi_1 + \beta(\xi + \xi_1) - \alpha = 0$ oder $\alpha\xi\xi_1 + \beta(\xi - \xi_1) + \alpha = 0$ dargestellt. Die durch die Bewegung hervorgerufene Projektivität ist also entweder selbst involutorisch oder wird es nach Hinzufügung der Umwendung $\xi_1 = -\xi_2$ an OX. Geht daher durch unsere Bewegung OX in OX_1 über und $O\overline{X}_1$ in OX, so fällt entweder OX_1 mit $O\overline{X}_1$ zusammen, oder es geht durch die Aufeinanderfolge dieser Bewegung und der Umwendung an OX gleichzeitig $O\overline{X}_1$ in OX und OX in $O\overline{X}_1$ über. Hiermit ist auch das 12. Postulat von der Umkehrbarkeit des Winkels bewiesen und wir erhalten das Resultat:

122. Satz. *Fügt man den projektiven Postulaten und den Postulaten 9—11 der Bewegung das Archimedische Postulat hinzu, so lassen sich die Postulate 12 und 13 oder die Umkehrbarkeit des Winkels und der Strecke beweisen, ebenso das 15. Postulat oder das Archimedische Postulat in projektiver Form, also auch der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.*

No. 55. Verteilung der uneigentlichen Punkte. Welchen Einfluß hat nun das Archimedische Postulat auf das Vorhandensein *uneigentlicher Punkte* oder die Form der Parallelenaxiome, je nachdem $\varkappa = 0$, $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$ ist? Für den ersten Fall haben wir schon auf S. 178 nachgewiesen, daß das Parallelenaxiom im gewöhnlichen Sinne gilt. Was die beiden anderen Fälle betrifft, so betrachten wir wieder auf der Geraden OX unter Zugrundelegung des Nullpunktes O, des ihm konjugierten Unendlichkeitspunktes U und des Einheitspunktes E erstens die projektive Skala $E_2, E_3, \ldots$, wo $(OE) = (EE_2) = (E_2E_3) = \cdots$ ist, und zweitens die gewöhnliche Skala $A_2, A_3, \ldots$, wo $\overline{OE} = \overline{EA_2} = \overline{A_2A_3} = \cdots$ ist. Ist nun E'

der zu E konjugierte Punkt auf OX, so sind für $\varkappa < 0$ O und U getrennt von E und E', für $\varkappa > 0$ hingegen nicht.

Dann läßt sich zuerst zeigen, daß für $\varkappa < 0$ $(OA_2) > (OE_2)$ ist. Da nämlich $(UEOE_2) = -1 = (E'EOA_2) = (A_2OEE')$, so bilden die Punktepaare O, E; U, A_2; E', E_2 eine Involution. Weil wir E immer so wählen können, daß O und E von U und A_2 nicht getrennt sind, so dürfen demnach auch E_2 und E nicht von U und A_2 getrennt sein. Setzen wir daher O, U, E' drei solchen eigentlichen Punkten projektiv, daß U auf $\overline{OE'}$ liegt, so liegt, weil O und U getrennt sind von E und E', auch E auf $\overline{OU}$, ferner E_2 auf $\overline{EU}$, also wegen des letzten Resultats A_2 auf $\overline{E_2E'}$, so daß in der Tat $(OA_2) > (OE_2)$ ist. Nun beweist man durch dasselbe Verfahren, daß $(OA_4) > (OB_4)$, wo B_4 von O harmonisch getrennt ist durch A_2 und U, und ebenso, daß $(OB_4) > (OE_4)$; denn aus $(UE_2OE_4) = -1 = (UA_2OB_4) = (OB_4UA_2)$ folgt $OB_4E_4U \barwedge UE_2A_2O$, also, weil O von A_2 getrennt ist durch U und E_2, so sind auch O und B_4 getrennt durch E_4 und U. So fortschließend findet man, daß $(OA_{2n}) > (OE_{2n})$, wie groß auch die ganze Zahl n sein mag.

Ist nun (OP) irgend eine positive projektive Strecke, so gibt es nach dem Archimedischen Postulate in seiner projektiven Form stets einen solchen Punkt E_m, daß $(OE_m) > (OP)$. Wir bemerken hierzu, daß wir das 15. Postulat auf S. 163 zwar für eigentliche Punkte U, O, E ausgesprochen haben, daß es aber noch dem Beweise des Fundamentalsatzes auch für irgend drei Punkte einer Geraden gilt.[1]) Da aber n stets so groß angenommen werden kann, daß $2^n > m$ ist, so finden wir, daß $(OA_{2n}) > (OE_{2n}) > (OE_m) > (OP)$, es ist also, da A_{2n} ein eigentlicher Punkt sein muß, auch P ein solcher. Weil endlich die negativen Strecken (OP) aus den positiven durch Umwendung um O hervorgehen, so ist hiermit gezeigt, daß *es für $\varkappa < 0$ überhaupt keine uneigentlichen Punkte geben kann.*[2])

Für $\varkappa > 0$ kann der einem Punkte O konjugierte Punkt U keinesfalls ein eigentlicher sein, weil man sonst ein Dreieck kon-

---

1) Überhaupt wird an dieser Stelle in Rücksicht auf die Hjelmslevsche Begründung der allgemeinen Geometrie in § 7 der Hinweis darauf nicht überflüssig sein, daß auf Grund des Fundamentalsatzes die Unterscheidung der projektiven Strecken nach ihrem Vorzeichen auch ohne den 120. Satz auf S. 167, also in der Ebene allein durchgeführt werden konnte (vgl. S. 63ff.).

2) Wir sind hier auf die Frage, ob zwei Geraden in einem Teil der Ebene, der eine Fortsetzung des zur Aufstellung der Postulate dienenden ist, weitere Punkte gemein haben können, nicht eingegangen (vgl. die Vorrede).

struieren könnte, dessen Seiten $< \overline{OU}$ und dessen Winkelsumme $> 2R$ wäre (vgl. den 1. Hilfssatz auf S. 103 und den 86. Satz auf S. 103). Betrachten wir aber die Skala $O, E, A_2, A_4, A_8, \ldots$ nebst derjenigen, welche aus den dazu konjugierten Punkten U, E', A_2', $A_4', A_8', \ldots$ besteht, so läßt sich zeigen, daß die Differenz

$$(OA'_{2n}) - (OA_{2n}) = a'_{2n} - a_{2n}$$

durch ein hinreichend großes n beliebig klein gemacht werden kann. Da nämlich A_2 der vierte harmonische Punkt von O für E und E' ist und folglich wegen $A_2OEE' \barwedge A_2'UE'E$ auch A_2' der vierte harmonische Punkt von U für dieselben Punkte, so ergeben sich die Gleichungen:

$$a_2 = 2ee' : e + e',\ a_2' = \frac{e + e'}{2};\quad a_4 = 2a_2a_2' : a_2 + a_2',\ a_4' = \frac{a_2 + a_2'}{2},$$

usf. Demnach ist:

$$a_2' - a_2 = \frac{(e' - e)^2}{2(e + e')} < \frac{e' - e}{2},\ a_4' - a_4 = \frac{(a_2' - a_2)^2}{2(a_2' + a_2)} < \frac{a_2' - a_2}{2} < \frac{e' - e}{4},$$

usf., also in der Tat:

$$a'_{2n} - a_{2n} < \frac{e' - e}{2^n}.$$

Hieraus läßt sich zeigen, daß jeder Punkt P, für den die positive Strecke (OP) der Ungleichung $(OP)^2 < \mathfrak{K}$ genügt, ein eigentlicher Punkt sein muß. Ist nämlich P' der zu P konjugierte Punkt oder $(OP) \cdot (OP') = \mathfrak{K}$, so können wir nach dem 15. Postulate n so groß machen, daß $(A_{2n}A'_{2n}) < (PP')$ wird. Da aber P und P' von A_{2n} und A'_{2n} nicht getrennt sein können, so muß $(OP') > (OA'_{2n})$ und $(OP) < (OA_{2n})$ sein, also, weil A_{2n} ein eigentlicher Punkt ist, auch P ein solcher sein.

Hiernach können wir den Satz aussprechen:

123. Satz. *Aus dem Archimedischen Postulate folgt für $\varkappa = 0$ das Parallelenaxiom oder der Satz, daß es in der Ebene durch einen Punkt zu einer Geraden eine und nur eine parallele oder nicht schneidende Gerade gibt, für $\varkappa < 0$, daß je zwei Geraden der Ebene einen eigentlichen Punkt bestimmen, und für $\varkappa > 0$, daß eine Gerade durch einen Punkt R mit einer Geraden OU dann und nur dann einen eigentlichen Punkt P bestimmt, wenn $(UOEP)^2 < \frac{1}{\varkappa}$, wo O der Fußpunkt der Senkrechten von R auf OU, U der ihm konjugierte Punkt und $\overline{OE}$ die $\varkappa$ bestimmende Längeneinheit ist.*

Nimmt man das 14. Postulat auf S. 92 oder das Postulat von den Schnittpunkten eines Kreises mit irgend einer Geraden an, existieren

also die beiden *Bolyai-Lobatscheffskijschen Parallelen* durch den Punkt R zu OU, so haben wir demnach bewiesen, daß *jede innerhalb des Winkels dieser beiden Parallelen liegende Gerade durch R mit OU einen eigentlichen Punkt bestimmt, jede andere Gerade durch R hingegen nicht.* Man sieht aber, daß ein solcher Satz sehr zusammengesetzter Natur ist. Es empfiehlt sich daher nicht, ihn als Postulat an die Spitze einer Begründung der nichteuklidischen Geometrie zu stellen, weil dadurch der Zusammenhang der Axiome zu keinem hinreichend einfachen Ausdrucke gebracht würde.[1])

No. 56. Postulat von den Schnittpunkten eines Kreises mit einer Geraden. Fundamentalreihen. Erweiterung des Begriffes Punkt. Was nun das *14. Postulat* betrifft, so kommt die Frage nach der Existenz der Schnittpunkte eines Kreises mit einer Geraden, wie die Sätze 82 und 83 auf S. 93 nun lehren, hinaus auf *die Existenz von zwei Punkten K, die von zwei Punktepaaren O, U und E, E' einer Geraden gleichzeitig harmonisch getrennt sind, falls O und U von E und E' nicht getrennt sind;* denn dann ist $(OE) \cdot (OE') = (OK)^2$. Sieht man also in Fig. 34 auf S. 92 den Punkt S als E' an, wo S umgekehrt aus R', E, P und F zu konstruieren ist, so folgt aus der Existenz der Punkte S' oder K umgekehrt auch diejenige der Schnittpunkte des Kreises mit der Senkrechten in R' auf OR'. Nun läßt sich allerdings die Existenz solcher Punkte K aus den übrigen Postulaten nicht unmittelbar erschließen, aber wir haben oben zwei solche Reihen von Punkten $A_2, A_3, \ldots, A_n$ und $A_2', A_3', \ldots, A_n'$ aufgestellt, daß erstens auch $(OA_n) \cdot (OA_n') = (OE) \cdot (OE')$, zweitens $(OA_i) < (OA_{i+1}) < (OA_{i+1}') < (OA_i')$ und drittens $(A_n A_n')$ für ein hinreichend großes n kleiner als eine beliebig kleine projektive Strecke (OD) gemacht werden kann. Nun pflegt man in der Arithmetik durch solche Reihen, *Fundamentalreihen*[2]) genannt, die irrationalen Zahlen zu definieren und von diesen neuen, durch Erweiterung des Begriffs der ganzen und der rationalen Zahlen entstehenden Zahlen zu beweisen, daß sie denselben Gesetzen des Rechnens und der Anordnung gehorchen wie jene. Es liegt nicht der geringste Grund vor, in der Geometrie nicht ebenso zu verfahren, indem wir die Definition aufstellen:

---

1) Vgl. S. 100 und den Artikel des Verf. Zur Bolyai-Lobatscheffskijschen Geometrie, Math. Ann. Bd. 59, p. 319.

2) Vgl. etwa Bachmann, Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen, Leipzig, 1892, S. 1—16.

29. Definition. *Sind auf der Geraden OU zwei solche Reihen von Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ und $A_1', A_2', \ldots, A_n', \ldots$ gegeben, daß erstens $(OA_i) < (OA_{i+1})$ und $(OA_i') > (OA_{i+1}')$, zweitens $(OA_i) < (OA_i')$ und drittens $(A_n A_n')$ durch ein hinreichend großes n kleiner gemacht werden kann als jede beliebig positive projektive Strecke, so nennen wir auch den Inbegriff der Punkte $A_1, A_2, \ldots$ und $A_1', A_2', \ldots$ einen Punkt A und den Inbegriff der projektiven Strecken (OA_1), $(OA_2), \ldots$ und (OA_1'), $(OA_2'), \ldots$ eine projektive Strecke (OA).*

Definiert man in der Tat das Rechnen mit diesen projektiven Strecken wie in der Arithmetik, also z. B. als Summe zweier solchen Strecken $(a_1, a_2, \ldots; a_1', a_2', \ldots)$ und $(b_1, b_2, \ldots; b_1', b_2', \ldots)$ die Strecke $(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots; a_1' + b_1', a_2' + b_2', \ldots)$, so beweist man wie dort, daß sowohl die Regeln des Rechnens als die Eigenschaften des Größer- und Kleinerseins erfüllt sind. Erweitert man daher die projektiven Strecken auf den Koordinatenachsen OX, OY, OZ um diese neuen (idealen) Strecken und baut in diesem erweiterten Größengebiet eine Geometrie auf wie auf S. 107—113, so gelten auch für die neuen Punkte, Strecken, Geraden und Ebenen alle unsere Postulate, auch diejenigen der Bewegung, so daß unsere Erweiterung gerechtfertigt erscheint. Außerdem aber gilt bei dieser Erweiterung der Begriffe Punkt und Strecke nach dem Obigen auch das 14. Postulat von den Schnittpunkten eines Kreises mit einer Geraden, so daß in diesem Sinne auch dieses als eine Folge der im 122. Satz genannten Postulate erscheint. Wir können dies Resultat folgendermaßen aussprechen:

124. Satz. *Erweitert man den Begriff Punkt in dem in der 29. Definition dargelegten Sinne, so ist auch das 14. Postulat auf S. 92 eine Folge der projektiven Postulate, der Postulate 9—11 der Bewegung und des Archimedischen Postulats.*

Die 29. Definition wird in den meisten Grundlegungen der Geometrie durch ein Axiom ersetzt, das die Existenz eines wie dort oder in ähnlicher Weise definierten Punktes *fordert.* Um klar einzusehen, daß ein solches Postulat überflüssig sei, müssen wir uns dessen erinnern (vgl. Einleitung S. 3), daß die Postulate die Begriffe der Geometrie niemals erschöpfend erklären können, sondern nur diejenigen Beziehungen zwischen den als existent vorausgesetzten Elementen der Geometrie, den Punkten, fordern, welche als Grundlage der rein logischen Beweisführung dienen. Wenn wir daher den ursprünglich angenommenen Elementen durch Definition neue hinzufügen, so werden sie im Sinne des logischen Aufbaus der Geo-

metrie ebenso existieren wie jene, sobald zwischen ihnen die in den Postulaten ausgesprochenen Beziehungen gelten. Vielleicht ist das Verkennen dieser Sachlage in dem Umstande zu suchen, daß man bisher nicht so ausführlich, wie wir es in § 6 getan haben, die Geltung der Axiome für eine wie dort definierte Geometrie dargetan hat. Ob die in der 29. Definition gemeinten Punkte noch in einem andern Sinne existieren, ist eine Frage, die die reine Geometrie nichts angeht und unseres Dafürhaltens schwerlich wird befriedigend beantwortet werden können.[1]) Jedenfalls hätte die *Postulierung* ihrer Existenz auch für die geometrische Praxis keinen Sinn, da es für diese selbstverständlich ist, daß Punkte, deren Abstand beliebig klein wird, zusammenfallen. In der Tat führt das oben angegebene Näherungsverfahren zur Konstruktion von $\sqrt{\overline{OE} \cdot \overline{OE'}}$ auch praktisch sehr rasch zum Ziele.

No. 57. Maßzahlen. Analytischer Charakter der trigonometrischen Funktionen. Analytischer Ausdruck der Maßzahlen der Strecke. In dem erweiterten Größengebiet, daß nach Festlegung eines Unendlichkeits-, eines Null- und eines Einheitspunktes auf Grund des Archimedischen Postulats mit dem Gebiete aller rationalen und irrationalen Zahlen übereinstimmt, entspricht nun nicht nur jeder projektiven Strecke (OP) eine gewisse rationale oder irrationale Zahl x, sondern auch jedem Winkel und jeder Strecke in gewöhnlichen Sinne eine *Maßzahl*. Das Erste folgt aus dem Archimedischen Postulate in projektiver Form in bekannter Weise, da die Teilung einer projektiven Strecke in gleiche Teile, wie wir auf S. 165 sahen, ebenso geschieht wie in der euklidischen Geometrie.

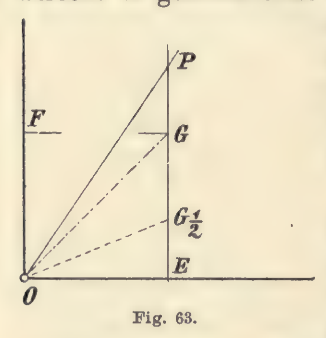


Fig. 63.

Handelt es sich aber um die *Amplitude* EOP (vgl. die 20. Definition auf S. 80), deren Endschenkel die Senkrechte in E auf OE in dem Punkte P mit der Ordinate $y = (EP)$ schneiden mag, so finden wir folgendermaßen deren Maßzahl η und deren analytische Beziehung zu y (Fig. 63). Wir treffen natürlich die Festsetzung, daß kongruenten oder durch Drehung um O auseinander hervorgehenden Amplituden dieselben Maßzahlen zukommen, und können, weil nach

1) Das geht wohl auch aus den gründlichen Erörterungen hervor, die Wellstein dieser Frage in Weber-Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik, Leipzig, 2. Aufl. 1907, 2. Bd. S. 110—151, gewidmet hat.

dem 78. Satze auf S. 80 die Summation der Amplituden denselben Regeln gehorcht wie die der Zahlen, annehmen, daß der Summation der Amplituden diejenige ihrer Maßzahlen entspricht. Ist also $EOP' = n \cdot EOP$, so werden wir auch $\eta' = n \cdot \eta$ setzen. Wir beschränken uns zuerst auf die Amplituden, die höchstens einem rechten Winkel gleich sind, nehmen also y als positiv an und ordnen der Amplitude EOG, deren Endschenkel die Halbierungslinie des rechten Winkels EOF, oder die die Hälfte dieses Winkels ist, die Maßzahl 1 zu, diesem selbst also Maßzahl 2. Halbieren wir die Amplitude EOG wieder, so erhalten wir eine Amplitude $EOG_{\frac{1}{2}}$ mit der Maßzahl $\frac{1}{2}$, also durch Fortsetzung dieser Halbierung eine Amplitude $EOG_{\frac{1}{2^n}}$ mit der Maßzahl $\frac{1}{2^n}$. Ist nun $\eta' = \eta + \eta_1$, so folgt, da $y = \operatorname{tg}(EOP)$ ist, aus den Formeln (VIII) auf S. 81:

(1) $$y' = \frac{y + y_1}{1 - y y_1}$$

also, falls $\eta' = 2\eta$ ist:

(2) $$y' = \frac{2y}{1 - y^2},$$

deshalb $y < \frac{y'}{2}$. Ist daher $\eta' = \frac{1}{2^n}\eta$, so wird $y < \frac{1}{2^n}y'$ sein. Hieraus geht in Rücksicht darauf, daß für die projektiven Strecken (EP) das 15. Postulat gilt, hervor, daß jede Amplitude erstens durch fortgesetzte Halbierung kleiner gemacht werden kann als jede andere Amplitude und zweitens durch fortgesetzte Verdoppelung, also auch Vervielfachung größer gemacht werden kann als jede andere Amplitude (vgl. die 24. Definition auf S. 95). Wir werden also für jede ganze Zahl n jede Amplitude EOP zwischen zwei Amplituden

$$EOG_p = \frac{m}{2^n} EOG \quad \text{und} \quad EOG_{p'} = \frac{m+1}{2^n} EOG$$

einschließen können, wo m eine ganze Zahl ist. Hiermit ist gezeigt, wie die jeder Ampitude entsprechende Maßzahl η mit Hilfe von zwei Fundamentalreihen konstruiert werden kann; zugleich sieht man, daß der 29. Definition zufolge jeder Maßzahl, die zwischen 0 und 2 liegt, eine Amplitude entspricht, die höchstens einem rechten Winkel gleich ist. Daß diese Maßzahlen sich entsprechend der Addition der Amplituden selbst addieren, folgt leicht aus der Definition der Summe irrationaler Zahlen.

Setzt man nunmehr $y = \tan\left(\varphi \frac{\pi}{4}\right)$, wo $\tan$ die als Quotient zweier beständig konvergenter Potenzreihen definierte analytische

Funktion ist $\pi = 3{,}1415926\ldots$ und φ auf das Intervall von 0 bis 2 beschränkt sein mag, so ist bekanntlich die Beziehung zwischen y und φ eine umgekehrt eindeutige. Nun ist einerseits für $y = 1$ auch $\varphi = 1$ und andererseits $\varphi' = \varphi + \varphi_1$, wenn $EOP' = EOP + EOP_1$ oder $y' = \frac{y + y_1}{1 - yy_1}$ ist.[1]) Demnach ist für jede Amplitude $EOG_{\frac{1}{2^n}}$ auch $\varphi = \frac{1}{2^n}$, es kann daher auch für eine beliebige Amplitude EOP die aus $y = \tan\left(\varphi\frac{\pi}{4}\right)$ folgende Zahl φ von der Maßzahl ξ dieser Amplitude nicht verschieden sein. Wir erhalten daher das Resultat:

125. Satz. *Bei Voraussetzung des Archimedischen Postulats sind die in der 22. Definition auf S. 80 definierten Funktionen Kosinus und Sinus in die Reihen* $1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \mp \ldots$ *und* $\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} \pm \ldots$ *entwickelbar, wenn dem rechten Winkel die Maßzahl* $\varphi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5707963\ldots$ *zugeordnet wird.*

Was nun die *Maßzahl* ξ betrifft, die *jeder Strecke* $\overline{OP}$ der Achse OX entspricht, so ist zuerst für $\varkappa = 0$ $\xi = x = (OP)$, weil die projektive Skala mit der gewöhnlichen zusammenfällt. Im Falle der nichteuklidischen Geometrie können wir zuerst zeigen, daß $\overline{OE}$ durch fortgesetzte Halbierung kleiner gemacht werden kann als jede andere Strecke $\overline{OD}$. Ist nämlich U' ein solcher eigentlicher Punkt, daß E auf $\overline{OU'}$ liegt, und $E'_{\frac{1}{2}}$ die projektive Mitte von (OE) für U' als Unendlichkeitspunkt, so ist nach dem zweiten Hilfssatze auf S. 156 $\overline{OA_{\frac{1}{2}}} < \overline{OE'_{\frac{1}{2}}}$, also auch $\overline{OA_{\frac{1}{4}}} < \overline{OB}$, wenn B die Mitte von $\overline{OE'_{\frac{1}{2}}}$ ist (vgl. den Beweis des 2. Hilfssatzes auf S. 105 Mitte). Nun folgt ebenso, daß $\overline{OB} < \overline{OE'_{\frac{1}{4}}}$ ist, also auch $\overline{OA_{\frac{1}{4}}} < \overline{OE'_{\frac{1}{4}}}$. So fortschließend findet man in der Tat, daß $\overline{OA_{\frac{1}{2^n}}} < \overline{OE'_{\frac{1}{2^n}}}$ ist, also kleiner gemacht werden kann als jede vorgelegte Strecke. Hiernach und auf Grund des Archimedischen Postulats kann man wie bei den Amplituden jeder Strecke $\overline{OP}$ eine Maßzahl ξ mit Hilfe von zwei Fundamentalreihen zuordnen und umgekehrt. Welche Beziehung besteht dann zwischen ξ und $x = (OP)$?

---

1) Vgl. z. B. Thomae, Elementare Theorie der analytischen Funktionen, Halle, 1880, S. 52.

Ist zuerst $\varkappa < 0$, so sind nach dem 123. Satze alle Punkte eigentliche, es besitzt daher auch die Strecke $\overline{OU}$ einen eigentlichen Mittelpunkt $\bar{E}$. Setzen wir daher $(UO\bar{E}P) = \bar{x}$ und bezeichnen mit $\bar{\xi}$ die zu $\overline{OP}$ in bezug auf die Längeneinheit $\overline{O\bar{E}}$ gehörige Maßzahl, so sind die Abszissen zweier konjugierter Punkte durch die Gleichung $\bar{x} \cdot \bar{x}' = -1$ verbunden, und die Formel (XI) auf S. 83 für die Schiebung geht über in $\bar{x}' = \frac{\bar{a} + \bar{x}}{1 - \bar{a}\bar{x}}$. Demnach erhalten wir durch dieselben Überlegungen, die zu dem 125. Satze führten, das Resultat, daß $\bar{x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\bar{\xi}\right)$ ist. Nun ist nach der Definition des Produkts auf (S. 56) $\bar{x} = x \cdot (UO\bar{E}E)$. Ist daher $\frac{4\lambda}{\pi}$ die der beliebigen Längeneinheit $\overline{OE}$ in bezug auf die absolute Einheit $\frac{1}{2}\overline{OU}$ zukommende Maßzahl, so wird $\bar{\xi} = \xi\frac{4\lambda}{\pi}$ und:

$$\text{(I)} \qquad x \operatorname{tang} \lambda = \operatorname{tang}(\lambda\xi);$$

man findet leicht, daß $\operatorname{tang}\lambda = \sqrt{-\varkappa}$ (vgl. die folgende Schiebungsformel).

Ist endlich $\varkappa > 0$, so gehen wir von der Formel (XI) auf S. 83:

$$\text{(3)} \qquad x' = \frac{x + x_1}{1 + \varkappa x x_1}$$

aus, wo ja x' die Abszisse der Strecke $\overline{OP'}$ bedeutet, die die Summe der beiden zu x und x_1 gehörigen Strecken $\overline{OP}$ und $\overline{OP_1}$ in gewöhnlichem Sinne darstellt. Setzen wir daher $\sqrt{\frac{1}{\varkappa}} = k$, so folgt:

$$\text{(4)} \qquad k \pm x' = k\frac{(k \pm x)(k \pm x_1)}{k^2 + x x_1},$$

also:

$$\text{(5)} \qquad \frac{k - x'}{k + x'} = \frac{k - x}{k + x} \cdot \frac{k - x_1}{k + x_1}.$$

Ist daher $\overline{OP'} = n \cdot \overline{OP}$, so wird:

$$\text{(6)} \qquad \frac{k - x'}{k + x} = \left(\frac{k - x}{k + x}\right)^n.$$ [1]

Setzt man daher:

$$\text{(7)} \qquad \frac{k - x}{k + x} = \left(\frac{k - 1}{k + 1}\right)^\varphi = e^{\varphi\, l\left(\frac{k-1}{k+1}\right)},$$

so ist, da es sich hier ausschließlich um reelle Größen handelt, die Beziehung zwischen x und φ eine umgekehrt eindeutige. Weil aber

---

1) Vgl. hierzu F. Klein, Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, p. 584.

für $x = 1$ auch $\varphi = 1$ und $\varphi' = \varphi + \varphi_1$ wird, wenn $\overline{OP'} = \overline{OP} + \overline{OP_1}$ ist, so stimmen φ und ξ für alle Punkte $A_{\frac{m}{2^n}}$, wo m irgend eine ganze Zahl ist, überein, sie können daher überhaupt nicht voneinander verschieden sein. Demnach wird:

$$\text{(II)} \qquad \frac{x}{k} = \frac{1 - e^{-\lambda\xi}}{1 + e^{\lambda\xi}},$$

wo $\lambda = l\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$ ist.

Wir erhalten daher das Resultat:

126. Satz. *Wird jeder Strecke $\overline{OP}$ diejenige Maßzahl ξ zugeordnet, welche mittels der durch die fortgesetzte Halbierung der Längeneinheit entstehenden Fundamentalreihen $A_{\frac{m}{2^n}}$ und $A_{\frac{m+1}{2^n}}$ definiert ist, und zugleich der projektiven Strecke (OP) die Maßzahl x, die in entsprechender Weise durch projektive Teilung von (OE) entsteht, so ist die Beziehung zwischen x und ξ für $\varkappa = 0$ durch $x = \xi$ und für $\varkappa <$ resp. > 0 durch die Formeln* (I) *und* (II) *dargestellt.*

Läßt man auch komplexe Zahlen zu, so ergibt sich aus Formel (7) auch diejenige für $\varkappa < 0$, aber die hierbei entstehende Vieldeutigkeit der auftretenden Funktionen bedarf besonderer Untersuchung, die bei der obigen Darstellung vermieden wurde.

No. 58. Staudtsche Definition der Projektivität. Wir können nun zum Schlusse auch die *Staudtsche Definition der Projektivität,* die von der unsrigen (6. Definition auf S. 46) abweicht, mit ihr in Zusammenhang bringen. Die Staudtsche Definition (Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847, S. 49) lautet: „*Zwei einförmige Grundgebilde heißen zueinander projektiv* ($\barwedge$), *wenn sie so aufeinander bezogen sind, daß jedem harmonischen Gebilde in dem einen ein harmonisches Gebilde im anderen entspricht.*“ Nun gingen wir ja in § 3 gerade davon aus, daß zwei Punktreihen, die in unserem Sinne projektiv sind, es auch im Staudtschen Sinne sind. Das Umgekehrte können wir aber erst auf Grund des Archimedischen Postulats beweisen. Der Beweis dieser Identität kommt offenbar auf den Beweis der Gültigkeit des Fundamentalsatzes auch für die Staudtsche Definition hinaus oder auf den Beweis, daß auch jede Projektivität im Staudtschen Sinne die Identität sein muß, wenn drei Elemente U, O, E sich selbst entsprechen. Hierzu bedarf es nach den Ausführungen am Anfange dieses Paragraphen nur der Gültigkeit des 120. Satzes auf S. 167 bei der Staudtschen Definition der Projek-

tivität. Nun haben wir aus dem Archimedischen Postulate das 15. und 14. Postulat bewiesen und aus letzterem den 83. Satz auf S. 93, nach dem es dann und nur dann zwei Punkte gibt, die die Paare A, B und C, D gleichzeitig harmonisch trennen, wenn A und B von C und D nicht getrennt sind. (Nach den Entwicklungen auf S. 181 folgt dieser Satz auch direkt aus dem 15. Postulate).

Hieraus folgt der 119. Satz unmittelbar, weil sonst zu zwei Punktepaaren, die sich trennen, ein Punktepaar gehören würde, das beide gleichzeitig harmonisch trennt. Nun kann der Fundamentalsatz wie auf S. 168 bewiesen werden. Man sieht aber, daß wir unserem Plane gemäß jedes Postulat, erst an der ihm gebührenden Stelle einzuführen, uns auf die Definition der Projektivität durch Perspektivität stützen mußten. Wir wollen dies Resultat in den Satz zusammenfassen:

127. Satz. *Aus dem 15. Postulate folgt die Identität der Staudtschen Definition der Projektivität mit ihrer Definition durch Perspektivität.*[1])

Wir haben somit die große Kraft des Archimedischen Postulats dargetan. In seiner projektiven Form macht es die Hilfe von Postulaten der Bewegung für die Begründung der allgemeinen projektiven Geometrie ganz entbehrlich, und in seiner ursprünglichen Form hat es die Postulate von der Umkehrbarkeit des Winkels und der Strecke sowie dasjenige von den Schnittpunkten einer Geraden mit einem Kreise zur Folge, es erlaubt endlich auch Winkeln und Strecken Maßzahlen zuzuordnen und die Beziehungen zwischen diesen durch elementare analytische Funktionen auszudrücken. Andererseits aber hat sich aus den ersten Paragraphen ergeben, wie große Gebiete der allgemeinen Geometrie von jedem Stetigkeitsaxiome unabhängig sind.

---

1) Vgl. auch Hölder, Die Zahlenskala auf der projektiven Geraden und die independente Geometrie dieser Geraden, Math. Ann. Bd. 65 (1908), S. 161 ff.

Register.

